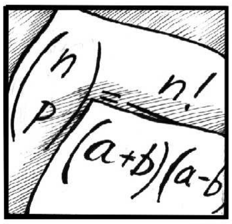

# Matematiikkapäivä lukiolaisille ja opettajille – ”Satunnaisuus ja todennäköisyys”

***Riitta Liira***
Maunulan yhteiskoulu
Helsingin matematiikkalukio

***Elja Arjas, Jukka Kohonen ja Matti Pirinen***
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

## Matematiikkapäivä Maunulassa 14.4.2007

Matematiikkapäivän järjestivät Maunulan yhteiskoulun opettajat ja Marjatta Näätänen Helsingin yliopistosta, ilmoittautumiset ja informaation hoiti LUMA-keskus. Rahoitus saatiin LUMA-keskukselta ja Maunulan yhteiskoululta. Päivään osallistui lukion oppilaita Munkkiniemen yhteiskoulusta, Olarin lukiosta, Ressun lukiosta ja Maunulan yhteiskoulusta ja Helsingin matematiikkalukiosta.

Matematiikkapäivänä joukko nuoria matikisteja kokoontui Maunulan yhteiskouluun ratkomaan todennäköisyyslaskennan probleemoja. Aluksi Helsingin yliopiston professori Elja Arjas luennoi aiheesta ”satunnaisuus ja todennäköisyys”. Sen jälkeen koululaiset sovelsivat oppimaansa laskuharjoituksissa, joita ohjasivat tohtoriopiskelijat Matti Pirinen ja Jukka Kohonen. Lisäksi Matti ja Jukka kertoivat väitöskirjatöistään, joissa todennäköisyysmalleilla on keskeinen osuus. Näin saatiin aavistus todennäköisyyslaskennan käytöstä nykyaikaisessa biologisessa tutkimuksessa. Seuraavassa muutamia osallistujien kommentteja.

”Oli hienoa tavata samanhenkisiä matematiikasta kiinnostuneita nuoria.”

”Päivän anti oli kiinnostava ja innostava.”

”Maunula tarjosi hyvää ruokaa.”

## Harjoitustehtäviä

1. Erään mikrobin genomin sekvenssissä esiintyy neljää emästä frekvensseillä $p_G = p_C = 0{,}3$ ja $p_A = p_T = 0{,}2$. Seuraavassa tarkastellaan kahden emäksen muodostamia ”sanoja”, joissa emästen oletetaan esiintyvän toisistaan riippumatta.

   a) Esitä näihin sanoihin liittyvät todennäköisyydet taulukkomuodossa.
   b) Emäkset $A$ ja $G$ ovat puriineja ja emäkset $C$ ja $T$ pyrimidiinejä. Olkoon $E$ tapahtuma ”sanan ensimmäinen emäs on pyrimidiini” ja $F$ tapahtuma ”sanan toinen emäs on $A$, $C$ tai $T$”. Määritä todennäköisyydet $P(E)$, $P(F)$, $P(E \cup F)$, $P(E \cap F)$.
   c) Olkoon $G = \{CA, CC\}$. Määritä silloin todennäköisyydet $P(G \,|\, E)$, $P(F \,|\, G \cup E)$ ja $P(F \cup G \,|\, E)$.

2. Kyläkaupan kahdesta pysäköintipaikasta kumpikin on keskimäärin 40 minuuttia tunnista varattuna ja loput ajasta vapaana. Keskimäärin 32 minuuttia tunnista ovat molemmat pysäköintipaikat yhtaikaa varattuina. Kaupalle saapuu samalla hetkellä kaksi autoilijaa. Mikä on todennäköisyys, että molemmat pääsevät heti näihin pysäköintipaikkoihin? (Ylioppilastehtävä, kevät 98)

3. Koulusta myöhästynyt oppilas myöhästyy seuraavankin koulupäivänä 30 prosentin todennäköisyydellä. Jos oppilas on tullut ajoissa kouluun, hän myöhästyy seuraavana koulupäivänä 10 prosentin todennäköisyydellä. Kuinka suuri on todennäköisyys, että oppilas tulee keskiviikkona ajoissa kouluun, jos hän saman viikon maanantaina myöhästyi koulusta? (Ylioppilastehtävä, kevät 92)

4. Punavihersokeuden aiheuttaa yksi X-kromosomissa sijaitseva geeni. Punavihersokeus määräytyy genotyypistä resessiivisesti, joten punavihersokean naisen molemmissa X-kromosomeissa on oltava punavihersokeuden aiheuttava geenivariantti eli alleeli. Miehellä punavihersokeuteen sen sijaan riittää yksi tällainen alleeli, koska Y-kromosomissa ei ole sille vastinalleelia. Millä todennäköisyydellä perheeseen syntyvä lapsi on punavihersokea, jos
   a) molemmat vanhemmat ovat punavihersokeita?
   b) isä ei ole punavihersokea, ja äiti on punavihersokeuden aiheuttavan alleelin kantaja, ts. vain toisessa hänen X-kromosomeistaan on punavihersokeuden alleeli?

5. Hatussa on pallo, joka on joko musta tai valkoinen (yhtä suurella todennäköisyydellä kumpaakin). Hattuun laitetaan valkoinen pallo, jonka jälkeen sieltä nostetaan umpimähkään pallo, joka on valkoinen. Millä todennäköisyydellä hatussa oleva pallo on valkoinen?

6. Eräällä laboratoriotestillä pyritään turvallisuussyistä selvittämään sitä, ovatko verta luovuttamaan tulleet henkilöt mahdollisesti HIV-viruksen kantajia. Käytännössä tämä tapahtuu tutkimalla kaikkien verenluovuttajien osalta, sisältääkö veri HIV:n vasta-aineita. Oletamme testin herkkyyden olevan 0,997, ts. testitulos on positiivinen tällä todennäköisyydellä, jos luovuttajalla todella on veressään vasta-aineita. Toisaalta oletetaan, että testi antaa todennäköisyydellä 0,015 (väärän) positiivisen testituloksen silloinkin, kun vasta-aineita ei oikeasti ole. Oletamme, että HIV:n vasta-aineita on väestössä noin yhdellä tuhannesta ja että verenluovuttajat eivät ole valikoitu otos väestöstä. (Tämä oletus voi käytännössä olla hyvin epärealistinen!) Millä todennäköisyydellä positiivisen testituloksen saaneen henkilön veri sisältää oikeasti HIV:n vasta-aineita?

7. Naapuriin on muuttanut perhe, josta sinulle on kerrottu, että heillä on kaksi lasta. Tarkastele seuraavia tilanteita:
   a) Haluat tutustua heihin hieman lähemmin ja soitat naapurin ovikelloa, jolloin avaamaan tulee noin kymmenvuotias poika, arvatenkin toinen perheen lapsista.
   b) Talonmies, joka on nähnyt perheen molemmat lapset, kertoo sinulle hieman arvoituksellisesti, että ”ainakin toinen lapsista on poika”.
   c) Vastaa kummassakin tapauksessa kysymykseen: Mikä on todennäköisyys, että molemmat perheen lapset ovat poikia? Oletamme tässä, että syntyvän lapsen sukupuoli määräytyy kullakin kerralla riippumattomasti ja että se on molemmille sukupuolille 1/2.

8. (”Monty Hallin ongelma”) Otat osaa viihdeohjelmaan. Edessäsi on kolme laatikkoa. Juontaja piilottaa yhteen laatikoista palkinnon (kaikki laatikot ovat tässä yhtä todennäköisiä). Pelin säännöt ovat seuraavat: Sinun tulee ensin valita yksi laatikoista. Sitä ei avata heti, vaan seuraavaksi juontaja avaa jommankumman muista laatikoista, valiten sen niin, että se on tyhjä. Jäljelle jää kaksi suljettua laatikkoa. Nyt saat avata jommankumman niistä. Kannattaako sinun avata
   a) alunperin valitsemasi laatikko vai
   b) toinen jäljellä oleva suljettu laatikko?

   Mikä on todennäköisyytesi saada palkinto valinnoilla a ja b?

9. (”Monty Hallin ongelman muunnelma”) Edessäsi on kolme laatikkoa. Juontaja piilottaa yhteen laatikoista palkinnon (kaikki laatikot ovat tässä yhtä todennäköisiä). Sinun tulee ensin valita yksi laatikoista. Sitä ei avata heti, vaan juontaja avaa summamutikassa jommankumman muista laatikoista. Laatikko osoittautuu tyhjäksi. Kannattaako sinun nyt avata
   a) alunperin valitsemasi laatikko vai
   b) toinen jäljellä oleva suljettu laatikko?

   Mitkä ovat voittotodennäköisyydet?

## Vihjeitä ja vastauksia tehtäviin

1. b) $P(E) = 0{,}5$; $P(F) = 0{,}7$; $P(E \cup F) = 0{,}85$; $P(E \cap F) = 0{,}35$. c) $P(G \mid E) = 0{,}3$; $P(F \mid G \cup E) = 0{,}7$; $P(F \cup G \mid E) = 0{,}7$.

2. Merkitään $A =$ ”Paikka 1 varattu” ja $B =$ ”Paikka 2 varattu”. Todennäköisyyksien yhteenlaskukaavalla saadaan laskettua $P(A \cup B)$. Mikä on tämän tapahtuman komplementti? (Vastaus 1/5.)

3. Jos merkitään $M =$ ”myöhässä” ja $A =$ ”ajoissa”, niin $P(\text{ke} = A \mid \text{ma} = M) = P(\text{ke} = A \cap \text{ti} = A \mid \text{ma} = M) + P(\text{ke} = A \cap \text{ti} = M \mid \text{ma} = M)$. (Vastaus 84 %.)

4. a) 1. b) 1/4.

5. Pallojen väreille on kaksi mahdollisuutta: $(v, v)$ tai $(v, m)$, joissa ensimmäinen $v$ viittaa alussa nähtyyn valkoiseen palloon. Ennen nostokoetta $P[(v, v)] = P[(v, m)] = 1/2$, mutta mitä on $P[(v, v) \mid \text{nostettu } v]$? Käytä Bayesin kaavaa! (Vastaus 2/3).

6. Jos $T$ merkitsee tapahtumaa ”positiivinen testitulos” ja $H$ tapahtumaa ”oikeasti HIV:n vasta-aineita”, tehtävänä on laskea ehdollinen todennäköisyys $P(H \mid T)$. Käytä Bayesin kaavaa! (Vastaus: 6,2 %.)

7. Ongelmaa on käsitelty Wikipediassa http://en.wikipedia.org/wiki/Boy_or_Girl. (Vastaus: a) 1/2. b) 1/3.)

8.–9. Oikea ratkaisu selityksineen ja hiukan tehtävän värikästä historiaa löytyy mm. Wikipedia-sivulta http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem. (Vastaus: 8a) 1/3 ja 8b) 2/3. 9a) 1/2 ja 9b) 1/2.)

Oppilaat kuuntelevat kiinnostuneina Elja Arjaksen luennointia satunnaisuudesta ja todennäköisyydestä.

Oppilaita tekemässä laskuharjoituksia Matti Pirisen ja Pekka Kontkasen (Munkkiniemen yhteiskoulun lukio) ohjauksessa.