Kaksi syntymäpäiväsankaria

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Sata ei ole matemaattisesti kovin kiinnostava luku, mutta ihmisellä sattuu olemaan kymmenen sormea ja kymmeneen perustuva tapa nimetä ja merkitä lukuja. Tapahtumat, joista on kulunut tasamäärä satoja vuosia, tulevat usein huomion kohteiksi.

Tämän vuoden huhtikuussa tulee kuluneeksi täysiä satoja vuosia kahden merkittävän matemaatikon syntymästä. Heillä on muitakin yhteisiä piirteitä: Kumpikin teki suuren osan merkittävimmästä työstään muualla kuin kotimaassaan ja kummankin elämä koskettaa Suomea, toisen tosin aika ohuesti. Kummankin uraa auttoi alkuun merkittävän avoimen ongelman ratkaisussa onnistuminen, ja molempien matematiikassa yksi merkittävä osa liittyi aikaisemman hämärästi itseään ilmaissen matemaatikon ajatusten ymmärrettäväksi tekemiseen. Henkilöt ovat *Leonhard Euler* ja *Lars Valerian Ahlfors*.

Eulerin elämä

Leonhard Euler syntyi Baselissa Sveitsissä 15. huhtikuuta 1707. Baselin porvarit olivat noina aikoina päättäneet, että matematiikka on koulussa turha aine, ja poistaneet sen kokonaan. Nuoren Eulerin koulutoveri sattui kuitenkin olemaan aikansa merkittävimpiin kuuluneen matemaatikon *Johann Bernoullin* poika, ja isä-Bernoulli johdatti Eulerin matematiikan piiriin. Opetusmenetelmä oli tehokas: Bernoulli antoi Eulerille luku- ja perehtymistehtäviä viikoksi ja salli oppilaan tulla sunnuntaina kyselemään, jos jotain oli jäänyt epäselväksi. Kunnianhimoinen Euler pyrki ymmärtämään itse ja kysymään niin vähän kuin mahdollista. Menetelmä toimi. Euler valmistui maisteriksi Baselin yliopistosta 16-vuotiaana. Hiukan vaikea yhdistelmä työnsaannin kannalta.

1700-luvun alussa Itämeren rannoilla tapahtui. Tsaari *Pietari Suuri* ryhtyi tosissaan johtamaan maataan Eurooppaan. Nevan suun soille perustettiin Pietarin kaupunki ja maata vallattiin Ruotsilta; Suomikin oli pitkään miehitettynä Ison Vihan aikaan. Pietarin pyrkimykset eivät olleet pelkästään sotaisia. Eräiden muiden aikansa hallitsijoiden tavoin hänkin halusi rakentaa ympärilleen oppineiden piirin, tiedeakatemian. Pietari ehti kuolla, mutta vuonna 1725 Akatemia aloitti toimintansa. Sen jäseniksi oli värvätty kaksi Johann Bernoullin poikaa, Daniel ja Nicolaus, ja myös tuolloinkin vielä varsin nuorelle Eulerille tarjottiin paikkaa Pietarissa. Euler oli saavuttanut ensimmäisen tieteellisen menestyksensä osallistumalla Pariisin tiedeakatemian kilpailuun, jossa aiheena oli purjelaivan mastojen konstruktio. Ei ihan sveitsiläisen aihe.

Eulerin ensimmäiset tehtävät Pietarissa olivat vaihtelevia. Hän opetti Tiedeakatemiassa ja Merisotakoulussa vaihtelevia aineita, fysiologiasta alkaen. Pian tehtävä vaihtui ensin fysiikan ja sitten matematiikan professoriksi. Missään vaiheessa Euler ei ollut fakki-idiootti. Hän antoi neuvoja hallitukselle eri asioissa, osallistui Venäjän kartoitukseen, auttoi laivanrakennuksessa ja suunnitteli paloruiskuja. Kruununperijän horoskoopin laadinnasta hän kuitenkin kieltäytyi.

Euler oli Pietarissa kahteen otteeseen, ensin vuoteen 1741 ja sitten vuodesta 1766 elämänsä loppuun. Väliajan Euler toimi Berliinissä. Preussin kuningas *Fredrik II* eli Fredrik Suuri halusi oman statussymbolinsa, Berliinin Akatemian, olevan numero yksi tiedeakatemioiden joukossa ja houkutteli Eulerin sen jäseneksi ja johtoon. Eulerin ja Fredrikin välit eivät olleet parhaat mahdolliset: ahkera, asiallinen ja mutta väritön matemaatikko ei viehättänyt monarkkia samalla tavoin kuin esimerkiksi kirjailija-filosofi *Voltaire*, Fredrikin suosikki. Lopulta Euler kyllästyi ja hakeutui takaisin Pietariin, jossa valtaa nyt piti saksalaissyntyinen keisarinna *Katariina*, myös II, myös Suuri.

Euler avioitui Pietarissa saksalaissyntyisen *Katharina Gsellin* kanssa. Eulereilla oli 13 lasta. Eulerin tasaisen ja työteliään elämän yksi tragedia oli näön menetys. Eulerin oikean silmän näkö meni jo vuonna 1738. Perimätieto sanoo syyn olleen auringon katsomisen kaukoputken läpi, mutta luultavampi syy on infektiosairaus. Melkein kaikki Eulerin muotokuvat on maalattu niin, että malli on kääntänyt maalariin päin kasvojensa vasemman puolen. Fredrik Suuri nimitteli Euleria ilkeyksissään kykloopikseen. Pian Eulerin palattua toisen kerran Pietariin hän menetti kaihin takia näkönsä toisestakin silmästä. Vuonna 1771 Eulerin kaihi leikattiin ja hän näki muutaman päivän ajan, mutta sitten silmiin iski infektio, joka sokeutti Eulerin täydellisesti ja lopullisesti.

Näön menetyksellä ei näytä olleen mitään vaikutusta Eulerin työtahtiin. Hän pystyi käsittelemään matematiikkaa päässään ja ajattelemaan valmiiksi tuloksensa, jotka hän sitten saneli assistenteilleen.

Tässä tulemme Eulerin ja Suomen yhteyteen. Yksi Eulerin tärkeimpiä assistentteja oli *Anders Lexell*, Turussa jouluaattona 1740 syntynyt raatimies Jonas Lexellin poika. Lexell oli 1763 tullut Turun Akatemian dosentiksi, mutta hänelle kutsu Pietariin vuonna 1768, siis kaksi vuotta Eulerin toisen Pietarin-kauden alun jälkeen, oli merkittävä askel tieteen suureen maailmaan. Kutsun takana oli Euler. Lexell nimitettiin jo 1775 professoriksi Turkuun, mutta hän otti jatkuvasti virkavapautta voidakseen toimia Eulerin luona Pietarissa. Kun Euler kuoli 1783, Lexell peri hänen virkansa. Hän kuoli kuitenkin jo seuraavana vuonna. Lexell on ensimmäinen kansainvälisesti merkittävä suomalainen matematiikko. Hänen saavutuksiinsa kuuluu Uranusplaneetan tunnistaminen planeetaksi. (Uranuksen löytäjä, englantilainen William Herschel oli tulkinnut löytönsä komeetaksi.) Uranuksen ratalaskelmista on kunnian saanut kuuluisa ranskalaismatemaatikko *Pierre Simon Laplace*, mutta Lexell oli tehnyt omat laskunsa Laplacesta riippumatta ja tietämättä.

Euler kuoli Pietarissa 18. syyskuuta 1783. Hänet haudattiin Vasilinsaarelle, mutta vuonna 1956 hänen maalliset jäämistönsä siirrettiin Aleksanteri Nevskin luostarin liepeillä olevalle hautausmaalle. Eulerin kookas mutta mahtailematon hautakivi löytyy vastapäätä usein turistikohteena olevaa "Kuuluisuuksien hautausmaata", sitä, johon mm. Tšaikovskin ja Dostojevskin maalliset jäännökset on sijoitettu. Pietarissa käydessä kannattaa poiketa.

Eulerin matematiikkaa

Eulerin matemaattisten pääsaavutusten pintapuolinenkaan luettelo ei ole näissä puitteissa mahdollista. Euler oli luultavasti kaikkien aikojen tuotteliain matemaatikko. On laskettu, että hän kirjoitti 866 tieteellistä artikkelia. Pietarin tiedeakatemian julkaisut täyttyivät Eulerin kirjoituksista kymmeniksi vuosiksi hänen kuolemansa jälkeen. Eulerin koottuja teoksia on Sveitsissä julkaistu yli 70 vankkaa osaa. Euler käsitteli tutkimuksissaan kaikkia tuohon aikaan tunnettuja matematiikan aloja ja pani alulle uusia. Google-haku sanalla Euler tuottaa 12 100 000 iskemää (helmikuun alussa 2007), kun Gauss, "matemaatikkojen kuningas", saa vain 11 600 000 (ja Ahlfors 75 000).

Paitsi tutkimuksia, Euler kirjoitti loisteliaita oppikirjoja, jotka pitkälle ovat määrittäneet matemaattisen oppikirjan olemuksen. Vähäinen ei ole hänen merkityksensä myöskään matematiikan merkintöjen ja nimitysten keksijänä ja vakiinnuttajana. Meille kaikille tuttu π on tullut matematiikkaan varsinaisesti Eulerin oppikirjassa *Introductio in Analysin Infinitorum.* Euler kirjoitti myös kansantajuisesti: kuuluisa on hänen 1768 julkaisemansa ranskankielinen teos *Kirjeitä eräälle saksalaiselle prinsessalle erinäisistä fysiikan ja filosofian aiheista.* Se on erittäin selkeää ja yksinkertaista, mutta asiallista tieteen popularisointia.

Matemaatikoilla on kaunis tapa ikuistaa kollegojaan nimeämällä käsitteitä tai matemaattisia tuloksia heidän mukaansa. Otetaan tähän muutama näyte asioista joihin lähes jokainen matematiikan kanssa toimiva väistämättä törmää:

Eulerin kaava

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

on keskeisin väline kompleksilukujen käytössä ja ymmärtämisessä.

Eulerin monitahokaskaava $V-E+S=2$ sitoo yhdesti yhtenäisen monitahokkaan kärkien lukumäärän V, särmien lukumäärän E ja sivujen lukumäärän S yhteen. Laskepa suure kuutiolle, tetraedrille ja Kheopsin pyramidille!

Eulerin suora yhdistää missä tahansa kolmiossa keskijanojen leikkauspisteen M, sivujen keskinormaalien leikkauspisteen eli kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen O ja kolmion korkeusjanojen leikkauspisteen H. Tämän asian todistus ei ole kovin hankala. Joskus ihmetellään, miksei Eukleides tiennyt tätä.

Eulerin funktio $\phi(n)$ kertoo niiden positiivisten kokonaislukujen $k < n$ lukumäärän, joilla ei ole luvun n kanssa muita tekijöitä kuin 1. Eulerin–Fermat'n lause kertoo, että jos a:lla ja n:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, $a^{\phi(n)}$ antaa aina jakojäännöksen 1, kun jakaja on n. Kokeile, kun $n = 100$.

Numeerista matematiikkaan harrastava törmää Eulerin yksinkertaiseen likiarvomenetelmään differentiaaliyhtälön $y' = f(x, y)$ alkuarvotehtävän $y(x_0) = y_0$ ratkaisemiseksi on seuraava: valitaan askelpituus h; määritellään $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ jne. Silloin y_k on likimain yhtälön ratkaisun arvo pisteessä x_k.

Eulerin vakio γ on yksi matematiikan tärkeitä, monessa yhteydessä esiin tulevia erityisiä lukuja. Se on raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\approx 0{,}5772156649\ldots.$$

Hämmästyttävää on, että vieläkään emme tiedä, onko γ rationaali- vai irrationaaliluku.

Verkkoteorian peruskäsitteitä on *Eulerin ketju*. Sitä voisi havainnollistaa kävelynä kaikkia kaupungin katuja pitkin niin, mitään katuosuutta ei kävellä kahdesti. Euler ratkaisi vuonna 1735 "ajanvietematematiikan" ongelman, joka koski mahdollisuutta tehdä Königsbergin kaupungissa Itä-Preussissa kävely, joka olisi ylittänyt kaupungissa olleet seitsemän siltaa kunkin vain kerran. Monesti lasketaan, että nykyään suuret ja tärkeät matematiikan alat topologia ja verkkoteoria ovat saaneet alkusysäyksensä juuri tästä Eulerin ratkaisusta. Euler käsitteli kirjoituksissaan myös muita ajanvietematematiikan aiheita, mm. latinalaisia neliöitä, sudokujen esimuotoa.

Yksi nuoren Eulerin suuria ja matematiikan kannalta kauaskantoisimpia saavutuksia ja hänen maineensa perusta oli niin sanotun Baselin ongelman ratkaisu. Kysymys oli sarjan

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

summasta. Kysymystä oli pohtinut mm. Johann Bernoulli, tulokseen kuitenkaan pääsemättä. Euler onnistui vuonna 1735 osoittamaan, että summa on

$$\frac{\pi^2}{6}.$$

(Tuolloin Euler ei vielä käyttänyt kirjainta π vaan kirjainta p osoittamaan ympyrän kehän ja halkaisijan suhdetta.) Pari vuotta myöhemmin Euler johti yleisemmän kaavan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}=\prod\frac{1}{1-p^{-s}},$$

missä oikean puolen tulo ottaa huomioon kaikki alkuluvut.

Eulerin havainto on lähtökohta tarkasteluihin, jotka johtavat matematiikan luultavasti kuuluisimpaan avoimeen ongelmaan, *Riemannin hypoteesiin*. Eulerin kaavan vasemman puolen summa on s:n funktio, ja se on mielekäs myös, kun s on kompleksiluku. On tullut tavaksi merkitä tätä funktiota symbolilla ζ. Monien lukuteorian ongelmien kannalta olisi tärkeää tietää, milloin $\zeta(s) = 0$. Saksalainen *Bernhard Riemann* esitti vuonna 1859, että jos $\zeta(s) = 0$, niin joko s on parillinen negatiivinen kokonaisluku tai s on kompleksiluku, jonka reaaliosa on $\frac{1}{2}$. Onko todella näin, on yhä ratkaisematta. Ratkaisijalle olisi tarjolla miljoonan dollarin palkkiokin. Myös se vielä kuuluisampi ongelma, kymmenisen vuotta sitten ratkaisunsa saanut Fermat'n suuren lauseen todistus, saa kiittää kuuluisuudestaan Euleria: Euler oli ensimmäinen, joka tarttui Fermat'n heittämään syöttiin ja todisti Fermat'n lauseen ensimmäisen vaikeamman tapauksen: sen, että yhtälöllä $x^3+y^3 = z^3$ ei ole nollasta eroavia kokonaislukuratkaisuja.

Eulerin uskomatonta tuotteliaisuutta ja hänen tulostensa moninaisuutta esitellessä on tapana aina huomauttaa, että Eulerin matematiikka ei ollut kaikin puolin korrektia. Hän operoi paljon päättymättömillä sarjoilla. Nykymatemaatikko ja opiskelija tietää, että sarjoihin liittyy aina kysymys suppenemisesta ja siitä, voidaanko sarjan yksittäisiin termeihin kohdistuvat toimet kuten derivointi tai integrointi periyttää sarjan summalle. Euler ei näistä kysymyksistä samalla tavalla huolehtinut. Tämä oli kuitenkin hänen ajalleen tyypillistä. Suppenemiseen ja yleisemmin raja-arvoihin liittyvät ongelmat tiedostettiin ja ratkaistiinkin vasta Euleria seuraavan vuosisadan aikana. Eulerin matemaattinen intuitio johti kuitenkin siihen, että hänen epäilyttävätkin päättelynsä yleensä johtivat oikeaan lopputulokseen.

Eulerin tuotantoa on paljon esillä netissäkin: Euler Archive osoitteessa

`http://www.math.dartmouth.edu/~euler/`

pyrkii saamaan Eulerin koko tuotannon kaikkien näkyviin.

Lars Valerian Ahlfors

Lars Ahlfors syntyi Helsingissä 18. huhtikuuta 1907, siis lähes päivälleen 200 vuotta myöhemmin kuin Euler. Kun Ahlfors alkoi matematiikan opintonsa Helsingin yliopistossa 1924, matematiikan ainoana professorina oli *Ernst Lindelöf*, mies, jota enemmän kuin ketään muuta voi kiittää matematiikan korkeatasoisen tutkimuksen alkuun panemisesta Suomessa. Lindelöf oli monipuolinen matemaatikko, mutta hänen pääkiinnostuksensa kohde oli 1800-luvun lopulla voimakkaasti kehittyä alkanut kompleksilukumuuttujan kompleksilukuarvoisten funktioiden, erityisesti niin sanottujen analyyttisten funktioiden tutkimus. Lindelöfin toinen lahjakas oppilas, *Rolf Nevanlinna*, joka oli juuri julkaissut sittemmin meromorfifunktioiden arvojenjakautumisteorian tai Nevanlinnan teorian nimellä tunnetut tuloksensa, tuli Ahlforsin opiskeluvuosina toiseksi matematiikan professoriksi. Lindelöfin ansiota lienee pitkälti se, että kun Nevanlinna vuonna 1928 matkusti joksikin aikaa Zürichiin vierailevaksi tutkijaksi, juuri maisteriksi valmistunut 21-vuotias Ahlfors sai seurata häntä.

Funktioteoria, ainakin siltä osin kuin se Suomessa tuli merkittäväksi tutkimuskohteeksi, oli lähtöisin Ranskasta. Ja Ranskassa oli vuonna 1909 väitellyt tohtoriksi *Arnaud Denjoy* tutkimuksella, joka koski erästä kompleksifunktioiden erityisluokkaa, ns. kokonaisia funktioita. Denjoy oli väitöskirjassaan esittänyt otaksuman tällaisten funktioiden asymptoottisten arvojen lukumäärää. Otaksuma oli jäänyt todistamatta, mutta ongelma oli kiinnostava, ja sen ratkaisua olivat miettineet monet alan arvostetut tutkijat, Nevanlinnakin. Väitöskirjaansa aihetta kaipaavalle nuorelle Ahlforsille Nevanlinna ehdotti tutustumista Denjoyn ongelmaan. Nevanlinna oli varsin hämmästynyt, kun Ahlfors parin viikon kuluttua palasi ongelman ratkaisun kera.

Denjoyn ongelman ratkaisu sisältyy Ahlforsin vuonna 1930 (jolloin Ahlfors oli 23-vuotias) valmistuneeseen väitöskirjaan. Hänen tutkijanuransa eteni nyt nopeasti. Hänet nimitettiin Helsingin yliopiston apulaiseksi eli apulaisprofessoriksi vuonna 1932 ja professoriksi 1938. Lukuvuoden 1935–36 hän oli Harvardin yliopistossa. Tutkijana hän aluksi seurasi opettajaansa Nevanlinnaa, mutta varsin omintakeisesti. Merkittäväksi muodostui Ahlforsin 1935 julkaisema tutkimus *Zur Theorie der Überlagerungsflächen.*

Matemaatikot ovat jo yli sadan vuoden ajan kokoontuneet joka neljäs vuosi yleiseen kansainväliseen matemaatikkokongressiin, jossa esitellään laajasti tieteen uusimpia saavutuksia yli matematiikan monien erikoisalojen rajojen. Vuonna 1924 kokous pidettiin Torontossa Kanadassa. Kokouksen pääorganisoija oli *John Fields*. Hän oli niin taitava sponsoroinnin järjestäjä, että kokous tuotti pienen ylijäämän. Fields ehdotti, että ylijäämä käytettäisiin tulevissa Kansainvälisissä matemaatikkokongresseissa erittäin ansioituneiden matemaatikkojen palkitsemiseen. Fields kuoli vuonna 1932, eikä ehtinyt nähdä ehdotuksensa toteutuvan. Se kuitenkin toteutui vuonna 1936 Oslossa pidetyssä kongressissa. Palkittuja matemaatikkoja oli kaksi: amerikkalainen minimipintojen tutkija *Jesse Douglas* ja suomalainen Lars Ahlfors. Ahlforsin erityiseksi ansioksi katsottiin juuri edellisessä kappaleessa mainittu tutkimus.

Kun matematiikka ei kuulu niihin tiedonaloihin, joita Alfred Nobel halusi palkittavan, niin Fieldsin mitali on muodostunut ”matematiikan Nobeliksi”, korkeimmaksi kunnianosoitukseksi, jonka matemaatikko voi saada. (Mitaliin liittyvä rahapalkinto, 15 000 Kanadan dollaria, on kuitenkin pieni murto-osa Nobelin palkinnosta.) Ahlforsin Fieldsin mitali on nykyään Suomessa. Sen voi nähdä Helsingin yliopiston matematiikan laitosrakennuksen Exactumin ala-aulan vitriinissä Kumpulan kampusalueella.

Ahlfors jätti Suomen vuoden 1944 kesän sekavissa oloissa. Yksi syy pois siirtymiseen saattoi olla se, että Ahlforsin vaimo Erna oli itävaltalainen. Ahlfors siirtyi ensin Zürichiin ja sitten Harvardiin, jossa hän vuodesta 1946 oli matematiikan professorina vuoteen 1977, ja senkin jälkeen aktiivisena tutkijana. Ahlforsilla ohjasi noin 25 väitöskirjaa. (Pieni detalji, joka tavallaan osoittaa matematiikan paikkaa yleisessä arvostuskentässä: kun entinen pääministeri ja presidenttiehdokas Esko Aho vuonna 2000 lähti muutamaksi kuukaudeksi Harvardiin, Suomen Kuvalehti julkaisi laajan artikkelin Harvardissa opiskelleista tai vaikuttaneista suomalaisista. Lars Ahlforsia ei artikkelissa ollenkaan mainittu.)

Ahlfors oli – kuten matemaatikot keskimäärinkin ovat – ahkera ja kurinalainen tutkija. Hän oli kuitenkin myös, kuten akateemikko Olli Lehto Arkhimedes-lehdessä julkaistussa muistokirjoituksessaan toteaa ”värikäs, vieraanvarainen, voimaa uhkuva *bon vivant*”. Ahlforsin alkoholinkäyttöön liittyvät anekdootit ovat matemaatikkokertomusten klassikkoja. Hänet tunteneet antavat ylistäviä lausuntoja hänen ja Ernan vieraanvaraisuudesta ja ystävällisyydestä. Ja mainitsevat, että juhlaillankin jälkeisenä aamuna Ahlfors oli aina valmis jatkamaan työtään.

Lars Ahlfors eli korkeaan ikään ja jatkoi työtään lähes viimeisiin vuosiinsa asti. Ahlfors kuoli Pittsfieldsissä Massachusettsissa 11. lokakuuta 1996.

Ahlforsin matematiikka ei tietenkään ole yhtä laaja-alaista kuin Eulerin. Kahdessasadassa vuodessa matemaattisen tiedon määrä oli valtavasti kasvanut ja tietämyksen rajat edenneet niin, että näitä rajoja ei enää kukaan yksilö voinut työntää edemmäs kovin monessa paikassa. Funktioteorian tai niin kuin sitä nyt tavallisemmin nimitetään kompleksianalyysin alalla Ahlfors oli kuitenkin erittäin monipuolinen. Yksi hänen tutkimusaloistaan tuo uuden analogian Euleriin, joka lukuteoriassa paljon täydensi, selvensi ja korjasi Pierre de Fermat'n tuloksia.

Funktioteoreettikojen tutkimat analyyttiset funktiot ovat niin sanottuja konformikuvauksia. Se tarkoittaa, että vaikka funktion välittämä tason kuvaus vääntelisi kuvioita isossa mittakaavassa rajustikin, niin "mikroskooppisesti" kuvaus on yhdenmuotoisuuskuvaus: kahden käyrän välinen kulma säilyy aina samana. 1920-luvulta alkaen jotkut matemaatikot, Ahlfors heidän joukossaan, alkoivat miettiä, mitä voisi tapahtua, jos kuvaukselle sallittaisiin hiukan enemmän vapautta. Ahlfors antoi nimen tälle konformikuvauksia laajemmalle luokalle: ne ovat kvasikonformikuvauksia. Mutta ilman muuta pisimmälle näiden funktioiden tutkimuksessa pääsi saksalainen Oswald Teichmüller. Teichmüllerin tapa esittää asiansa oli kuitenkin erittäin vaikeaselkoinen, eikä hänen töihinsä tutustumiseen myöskään varsinaisesti kannustanut tieto Teichmüllerin voimakkaista ja vastenmielisistä poliittisista mielipiteistä (jotka eivät kuitenkaan hänen matematiikassaan näy, vaikka 1930-luvun Saksassa sellaistakin ilmeni).

Ahlforsin kirjoitukset 1950-luvulla toivat Teichmüllerin ajatukset ymmärrettäviksi. Kvasikonformikuvauksista kasvoi merkittävä kompleksianalyysin osa-alue. Se on ollut yksi tärkeimpiä matematiikan tutkimusaloja Suomessa 1900-luvun loppupuoliskolla.

Myös Ahlfors kirjoitti varsinaisten tutkimusten lisäksi oppikirjoja. Erityisesti vuonna 1953 ensi kerran ilmestynyt funktioteorian oppikirja *Complex Analysis* on säilyttänyt asemansa klassikkona. Ahlfors omistaa sen Ernst Lindelöfin muistolle.