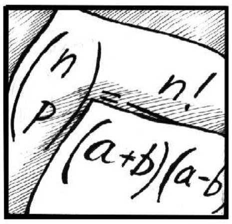


Ratkaisu edellisen kerran tehtävään

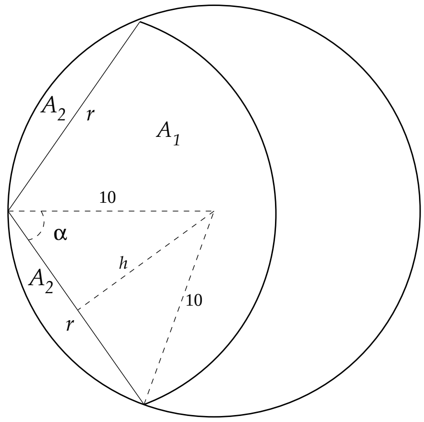
Pekka Alestalo

Esitin edellisessä numerossa kaksi tehtävää; tässä ratkaisu ensimmäiseen tehtävään. Jääköön toinen ratkaisu vielä seuraavaan numeroon.

Tilanne 1: Painoaan tarkkaileva lammas haluaa rajoittaa syömistään ja kiinnittää sen vuoksi itsensä köydellä (miten ihmeessä?) ympyrän muotoisen aitauksensa tolppaan.

Ongelma 1: Jos aitauksen säde on 10 m, niin mikä olisi sopiva köyden pituus, jotta lammas pystyisi syömään täsmälleen puolet aitauksen ruohosta? Vastaukseksi riittää likiarvo.

Ratkaisu 1: Lasketaan vuohen käytössä olevan (kuviossa kahden ympyrän kaaren rajoittaman) alueen pinta-ala muodossa $A = A_1 + 2A_2$; merkinnät selviävät kuviosta.



Pinta-ala A_1 saadaan sektorin alan lausekkeesta

$$A_1 = \frac{2\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \alpha r^2,$$

missä 2α on sektorin keskuskulma ja r kysytty köyden pituus, eli samalla kyseessä olevaa sektoria vastaavan ympyrän säde.

Pinta-ala A_2 saadaan katkoviivoitetun kolmion avulla vähentämällä 10-säteisen aitauksen r-pituisen jänteen rajoittaman kolmion ala koko sektorin alasta. Kolmion korkeudelle h on voimassa $\sin\alpha = h/10$, joten $h = 10\sin\alpha$. Saman kuvion mukaisesti $\cos\alpha = (r/2)/10$, joten $r = 20\cos\alpha$. Pinta-ala saadaan siis muodossa

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi} \cdot \pi \cdot 10^2 - \frac{1}{2} \cdot rh \\ &= 50\pi - 100\alpha - 100\sin\alpha\cos\alpha. \end{aligned}$$

Toisaalta pinta-alan A täytyy olla puolet koko aitauksen alasta $\pi \cdot 10^2$, joten kokoamalla tulokset yhteen, käyttämällä kaavaa $\sin\alpha\cos\alpha = (1/2)\sin(2\alpha)$ ja sieventämällä saadaan yhtälö

$$400\alpha\cos^2\alpha - 100\sin(2\alpha) - 200\alpha + 50\pi = 0.$$

Yhtälöllä pitäisi olla ratkaisu välillä $0 < \alpha < \pi/2$. Ei liene toivoakaan tarkasta ratkaisusta, joten nollakohta on laskettava numeerisesti esim. puolitusmenetelmällä eli haarukointia käyttämällä.

Tulokseksi saadaan $\alpha \approx 0{,}953$, joten kysytty köyden pituus on $r = 20\cos\alpha \approx 11{,}6$ metriä. Pienenä tarkistuksena voidaan vielä todeta, että tulos on suurempi kuin 10 m, kuten selvästi täytyykin olla.