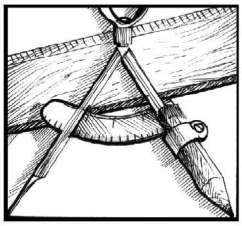

Hypetystä

Matti Lehtinen
Dosentti
Maanpuolustuskorkeakoulu

Funktiolaskimissa, esimerkiksi omistamassani korruptiolahjassa, lähes kymmenen vuotta vanhassa ja uutena vain noin 50 markan arvoisessa Shrap EL-531:ssä, on näppäin, joka on merkitty hyp. Kun sitä painaa ennen trigonometristen funktioiden sin, cos tai tan näppäilyä, saa näytölle lukuja, jotka selvästikään eivät ole trigonometristen funktioiden arvoja. Esimerkiksi näppäily "hyp", "sin", "π" tuottaa näytölle luvun 11,55, joka ei ainakaan ole $\sin(\pi)$.

Määritelmät

"Hyp-funktiot" ovat *hyperbolisia funktioita.* Niiden nimet ovat trigonometristen funktioiden kaltaisia, eteen vain laitetaan sana *hyperbolinen*. Funktiot eivät ole mitenkään eksoottisia. Itse asiassa nimitykset ovat turhia, sillä hyperbolisten funktioiden sijasta voidaan aina käyttää eksponenttifunktiota $x \mapsto e^x$ eli $\exp(x)$. Hyperbolisen sinin, kosinin ja tangentin eli funktiot sinh, cosh ja tanh määrittelevät kaavat

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right),$$
$$\tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

– Jos hienostella halutaan, funktioiden nimet voidaan lukea latinaksi: *sinus hyperbolicus*, *cosinus hyperbolicus*, mutta *tangens hyperbolica*. Latinassa adjektiivin muodon määrää pääsanan suku, ja *tangens* sattuu olemaan feminiini.

Käänteisfunktiot

Määrittelykaavoista voidaan heti tehdä muutama havainto. $\sinh x$ on pariton ja $\cosh x$ parillinen funktio: $\sinh(-x) = -\sinh x$ ja $\cosh(-x) = \cosh x$. Koska

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\left(e^{x/2} - e^{-x/2}\right)^2 + 2\right),$$

$\cosh x \geq 1$ kaikilla x. Jos $0 \leq x < y$, niin $2(\sinh y - \sinh x) = (e^y - e^x) + (e^{-x} - e^{-y})$. Koska eksponenttifunktio on kasvava, niin sinh on kasvava funktio positiivisten lukujen joukossa ja parittomuutensa takia koko reaalilukujen joukossa.

Jos edelleen oletetaan $0 \leq x < y$, voidaan laskea

$$\begin{aligned} 2(\cosh y - \cosh x) &= e^y - e^x + e^{-y} - e^{-x} \\ &= (1 - e^{-(x+y)})(e^y - e^x) > 0, \end{aligned}$$

koska $e^{-(x+y)} < 1$, kun $x + y > 0$. Funktio cosh on siis kasvava positiivisten lukujen joukossa. tanh-funktion määrittelykaavasta nähdään heti, että funktio on kasvava ja että $-1 < \tanh x < 1$ kaikilla x. Näistä havainnoista seuraa, että funktioilla sinh ja tanh on käänteisfunktiot ja että ei-negatiivisten lukujen joukkoon rajoitetulla cosh-funktiolla on käänteisfunktio.

Käänteisfunktioiden lausekkeet saadaan ratkaisemalla yhtälöt

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

Yhtälöistä ensimmäinen sievenee muotoon

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Yhtälö on tuntemattoman e^x toisen asteen yhtälö. Ratkaisukaavan mukaan on siis

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

Koska $e^x > 0$, vain +-merkki tulee kyseeseen. Yhtälön $y = \sinh x$ ratkaisu on siis

$$x = \ln\left(y + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Yhtälö

$$y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad y \geq 1$$

on vastaavasti sama kuin

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava antaa nyt

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}.$$

Olemme kiinnostuneita ratkaisuista, joissa $x \geq 0$ eli $e^x \geq 1$. Koska $(y + \sqrt{y^2-1})(y - \sqrt{y^2-1}) = y^2 - (y^2-1) = 1$, vain +-merkillä varustettu juuri voi olla ≥ 1 (jos $x > 0$). Valitsemme siis sen ja toteamme, että yhtälön $y = \cosh x$, $y \geq 1$, positiivinen ratkaisu on

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2-1}).$$

Viimein saamme samoin toisen asteen yhtälöä ratkaisemalla, että yhtälön $y = \tanh x$, $-1 < y < 1$, ratkaisu on

$$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Hyperbolisten funktioiden käänteisfunktioita kutsutaan *areafunktioiksi*. Niiden vakiintuneet merkinnät ovat $\operatorname{arsinh} y$, $\operatorname{arcosh} y$ ja $\operatorname{artanh} y$. Näissä "ar" ei ole "arkus", kuten trigonometristen funktioiden arcsin, arccos ja arctan nimissä, vaan "area". Tosin tietämättömyyteen perustuvia merkintöjä "arcsinh" jne. näkee. Niin on kirjoitettu Sharp-laskimenikin kanteen. Funktioiden nimet voi lukea *areasini*, *areakosini*, *areatangentti*, tai sitten puhua latinaa: *area sinus hyperbolicus* jne.

Kysymyksiä ja vastauksia

Teemme nyt kolme yksinkertaista kysymystä. Miksi tarkastelemillamme eksponentti- ja logaritmifunktioista rakentuvilla funktioilla on trigonometristen funktioiden nimien kaltaiset nimet, miksi niitä kutsutaan hyperbolisiksi ja miksi niiden käänteisfunktioiden nimissä esiintyy sana area eli ala?

Ensimmäiseen kysymykseen voi vastata katsomalla analogisia kaavoja. Tiedämme, että $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ ja $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Mitä on $\sinh(x+y)$? Se on

$$\frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)}).$$

Mitä on $\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$? Se on

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\Big((e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^y - e^{-y})(e^x + e^{-x})\Big)\\ &= \frac{1}{4}\Big(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-(x+y)}\\ &\qquad + e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-(x+y)}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(e^{x+y} - e^{-(x+y)}\Big).\end{aligned}$$

Siis $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$. Vastaavasti $\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \frac{1}{4}\Big((e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}\Big) = \frac{1}{2}\Big(e^{x+y} + e^{-(x+y)}\Big) = \cosh(x+y)$. Tarkkaan katsoen huomaamme, että sinh-funktion ja sin-funktion yhteenlaskukaavat ovat aivan samanlaiset, mutta cosh-funktion yhteenlaskukaavassa on pieni ero cos-funktion vastaavaan. Tämä on tyypillistä. Hyperbolisten funktioiden kesken vallitsevat relaatiot ovat yleensä merkkieroja vaille samoja kuin vastaavat trigonometristen funktioiden väliset relaatiot.

Kysymyksiemme kannalta keskeinen "melkein trigonometrinen" relaatio on Pythagoraan lauseen $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ vastine. Koska

$\cosh^2 t = \frac{1}{4}\Big(e^{2t} + e^{-2t} + 2\Big)$ ja $\sinh^2 t = \frac{1}{4}\Big(e^{2t} + e^{-2t} - 2\Big)$,

"hyperbolinen Pythagoraan kaava" on

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Kun sovellamme hyperbolisen kosinin yhteenlaskukaavaa, saamme

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

Kun tähän liitetään hyperbolinen Pythagoraan lause, saadaan $\cosh(2x) = 1 + 2\sinh^2 x$ ja jatkon kannalta tarpeellinen kaava

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}\Big(\cosh(2x) - 1\Big).$$

Vielä yksinkertaisempi hyperbolisen sinin yhteenlaskukaavan sovellus antaa $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$.

Trigonometrinen Pythagoraan lause on yhteydessä trigonometristen funktioiden määrittelyyn yksikköympyrän avulla: jos $x = \cos t$ ja $y = \sin t$, niin $x^2 + y^2 = 1$. Näinhän voidaan määritellä $\sin t$ ja $\cos t$ sen yksikköympyrän pisteen koordinaatteina, joka syntyy, kun origosta lähtevä ja x-akselin suhteen kulman t muodostava puolisäde leikkaa yksikköympyrän. Yksikköympyrä on erikoistapaus muotoa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

olevasta ellipsikäyrästä. Mutta tunnetusti

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

on hyperbelikäyrän yhtälö. Kun tässä valitaan $a = b = 1$, saadaan *tasasivuinen hyperbeli*, jonka yhtälö on siis

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Mutta kun merkitään $x = \cosh t$, $y = \sinh t$, huomataan hyperbolisesta Pythagoraan kaavasta, että $(\cosh t, \sinh t)$ on samalla tavoin tasasivuisen hyperbelin piste kuin $(\cos t, \sin t)$ on yksikköympyrän piste!

Miksi area?

Selitys hyperbolisen funktion nimelle on vielä puolinainen. Sinin ja kosinin tapauksessa parametrin t merkitys on ilmeinen: se on edellä mainittu kulma tai kaari x-akselista pisteeseen (x, y). Arcus-sanahan tarkoittaa kaarta. $t = \arccos x = \arcsin y$ on se kaari, jota vastaavan keskuskulman kosini on x ja sini on y. Mutta mikä on t tasasivuisen hyperbelin ja funktioiden sinh ja cosh tapauksessa? Tämän selvittääksemme joudumme hiukan integroimaan. Ja integroidaksemme tarvitsemme hiukan tietoa hyperbolisten funktioiden derivaatoista.

Hyperbolisen sinin ja kosinin derivaatat ovat äärimmäisen helposti laskettavissa suoraan funktioiden määritelmistä. Saamme

$$D \sinh t = \cosh t, \quad D \cosh t = \sinh t.$$

Tarkastelemme tasasivuisen hyperbelin pistettä (x, y), missä $x > 1$ ja $y > 0$. Origosta pisteisiin (x, y) ja $(x, -y)$ piirretyt janat ja pisteiden (x, y), $(x, -y)$ välinen hyperbelin kaari rajoittavat kolmikärkisen alueen. Laskemme sen pinta-alan. Koska $y = \sqrt{x^2 - 1}$, ala saadaan, kun sen kolmion alasta, jonka kärjet ovat $(0, 0)$, (x, y) ja $(x, -y)$ poistetaan osa, jota rajaavat hyperbelin kaari ja pisteiden (x, y) ja $(x, -y)$ kautta kulkeva x-akselia vastaan kohtisuora suora. Kolmion ala on $x\sqrt{x^2 - 1}$. Poistettava ala on

$$2 \int_1^x \sqrt{x^2 - 1}\, dx.$$

Laskemme viimeisessä kaavassa olevan integraalin. Sen laskemiseksi kannattaa tehdä muuttujanvaihto $x = \cosh u$. Nyt $x'(u) = \sinh u$ ja $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\cosh^2 u - 1} = \sinh u$. Kun $x = 1$, niin $u = 0$ ja kun $x = x$, niin $u = \operatorname{arcosh} x$. Integraali saa siis sijoituksen jälkeen muodon

$$\int_0^{\operatorname{arcosh} x} \sinh^2 u\, du.$$

Edellä johdetun $\sinh^2 x$:n lausekkeen avulla integraalimme muuttuu muotoon

$$\frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcosh} x} (\cosh(2u) - 1)\, du$$

ja tavallisella tempulla edelleen muotoon

$$-\frac{1}{2} \operatorname{arcosh} x + \frac{1}{4} \int_0^{2 \operatorname{arcosh} x} \cosh v\, dv.$$

Saamme integraalin arvoksi lopulta

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \operatorname{arcosh} x + \frac{1}{4} \Big/_0^{2 \operatorname{arcosh} x} \sinh v \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{arcosh} x + \frac{1}{4} \sinh(2 \operatorname{arcosh} x). \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} &\sinh(2 \operatorname{arcosh} x) = 2 \sinh(\operatorname{arcosh} x) \cosh(\operatorname{arcosh} x) \\ &= 2x\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh} x) - 1} = 2x\sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

Integraalin arvo on siis $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} x$. Integraali on puolet siitä alasta, jonka aioimme vähentää kolmiosta, jonka ala on $x\sqrt{x^2 - 1}$. Tämä merkitsee, että kolmikärkisen janojen ja hyperbelin kaaren rajoittaman alueen ala on tasan $\operatorname{arcosh} x$. Jos merkitsemme alaa t:llä, saamme kärkipisteen (x, y) koordinaateiksi $(\cosh t, \sinh t)$. Hyperbolisten funktioiden käänteisfunktio mittaa todella alaa, ja ala on esityksen $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$ parametrin t geometrinen merkitys.

Ympyrä sulkeutuu, kun muistamme ympyränsektorin alan kaavan. Kun sektorin keskuskulma on ϕ (radiaania), niin sektorin ala on $\frac{1}{2}\phi r^2$, missä r on ympyrän säde. Mutta tämähän merkitsee, että yksikköympyrän pisteiden $(\cos t, \sin t)$ ja $(\cos t, -\sin t)$ määrittämän sektorin ala on t; alaa voidaan yhtä hyvin pitää parametrina kuin kiertokulmaakin. Pitäisikö merkinnät $\arcsin y$ ja $\arccos x$ muuttaakin merkinnöiksi $\operatorname{arcos} x$ ja $\operatorname{arsin} y$?

Hyperbolisten funktioiden, eksponenttifunktion ja tavallisten trigonometristen funktioiden yhteys ei ole yllättävä, kun sitä lähestyy potenssisarjojen, kompleksilukujen ja differentiaaliyhtälöiden suunnista. Mutta se on toinen juttu.