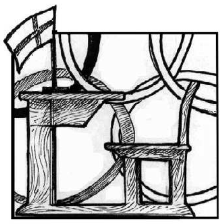

Vaikeita tehtäviä Sloveniassa – Kansainväliset matematiikka-olympialaiset 2006

Matti Lehtinen

Sadoista eri maissa pidettävistä koululaisten matematiikkakilpailusta muodostuu pyramidimainen rakenne, jonka kärjessä ovat Kansainväliset matematiikkaolympialaiset. Heinäkuussa 2006 pidettiin Slovenian Ljublajanassa jo 47. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset. Tapahtuma oli suuri: joukkueita oli saapunut 90 maasta, ja kilpailijoita oli 498. Joukkueet ovat enintään kuusijäsenisiä. Jotkin maat lähettävät vain parin kilpailijan joukkueen. Matematiikkaolympialaisissa ovat edustettuina kaikki maanosat, Afrikka kuitenkin heikoimmin. Tänä vuonna oli kilpailuun oli kuitenkin tullut mukaan suuri Länsi-Afrikan maa, Nigeria. Matematiikkaolympialaiset ovat – syystä jota ei tarkkaan voi ymmärtää – kovasti poikien kilpailu. Laskin avajaisissa, jossa kaikki joukkueet kävivät vuoron perään näyttäytymässä, vain 39 tyttöä.

Olympialaisten kuudeksi tehtäväksi joukkueenjohtajista koostunut tuomaristo äänesti sarjan, jossa on kaksi (numerot 1 ja 6) geometrian alaan kuuluvaa, ensimmäinen helpohko geometrinen epäyhtälö, jälkimmäinen kombinatorisia aineksia sisältävä, yksi (numero 2) kombinatorinen, yksi (numero 3) vaativa epäyhtälötehtävä, yksi (numero 4) helpohko kokonaislukuyhtälö ja yksi (5) algebran ja lukuteorian aineksia sisältävä. Tehtävien vaikeusporrastus oli selvä. Kummankin kilpailupäivän ensimmäinen tehtävä oli helppo. Tehtävä 1 oli seuraava:

Kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I. Kolmion sisäpiste P toteuttaa ehdon

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Osoita, että $AP \geq AI$ ja että yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $P = I$.

Kaikkiaan 358 kilpailijaa ratkaisi tehtävän täysin pistein, ja 32 joukkueen kaikki kilpailijat saivat tehtävästä kaikki mahdolliset pisteet. Ratkaisu perustui olennaisesti sen havaitsemiseen, että B, I, C ja P ovat samalla ympyrällä. Lisäksi oli selvitettävä tämän ympyrän keskipisteen sijainti: se on suoralla AI.

Toisen kilpailupäivän ensimmäisen tehtävän, tehtävän 4 muotoilu oli lyhyt:

Määritä kaikki kokonaislukuparit (x, y), jotka toteuttavat yhtälön

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Tämän ratkaisemisesta annettiin täydet 7 pistettä 248 kilpailijalle, mutta vain 9 joukkuetta sai kaikkiaan virheettömän suorituksen. Ratkaisun perusidea on kirjoittaa $y^2 - 1 = (y-1)(y+1)$ ja ryhtyä tarkastelemaan kakkosen potensseja peräkkäisissä parittomissa luvuissa $y-1$ ja $y+1$.

Kilpailupäivien toiset tehtävät olivat jo olennaisesti vaikeampia: tehtävän 2 ratkaisi täysin 78 kilpailijaa, 48 tehtävän 5, 28 tehtävän 3 ja 8 tehtävän 6. Tehtävä 2 oli geometris-kombinatorinen:

Kutsumme säännöllisen 2006-kulmion P lävistäjää *hyväksi janaksi*, jos sen päätepisteet jakavat P:n piirin kahteen osaan, joista kumpikin koostuu parittomasta määrästä P:n sivuja. Myös P:n sivuja pidetään *hyvinä janoina*. Monikulmio P jaetaan kolmioiksi 2003:lla lävistäjällä, jotka eivät leikkaa toisiaan P:n sisällä. Määritä sellaisten jaossa syntyvien tasakylkisten kolmioiden, joiden sivuista kaksi on hyviä janoja, suurin mahdollinen lukumäärä.

Että tällaisia kolmioita voi olla 1003, on melko helppo huomata. Se, että määrä ei voi olla tätä suurempi, perustuu aika monipolviseen induktiopäättelyyn.

Tehtävä 5 oli algebraa:

Kokonaislukukertoimisen polynomin P aste on n, $n > 1$. Olkoon k mielivaltainen positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan polynomia

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

missä P esiintyy k kertaa. Todista, että on olemassa enintään n kokonaislukua t, joille pätee $Q(t) = t$.

Ratkaisun perusidea on havainto, jonka mukaan tehtävän luvut t toteuttavat ehdon $P(P(t)) = t$.

Varsinaiset vaikeat tehtävät olivat 3:

Määritä pienin reaaliluku M, jolle epäyhtälö

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \le M(a^2+b^2+c^2)^2$$

toteutuu kaikilla reaaliluvuilla a, b ja c.

ja 6:

Liitetään jokaiseen kuperan monikulmion P sivuun b suurimman sellaisen kolmion ala, joka on kokonaan P:n sisällä ja jonka yksi sivu on b. Osoita, että kaikkiin P:n sivuihin liitettyjen alojen summa on ainakin kaksi kertaa P:n ala.

Kolmannen tehtävän ratkaisu alkaa avautua, kun vasen puoli mielletään a:n kolmannen asteen polynomiksi, jonka tekijöihin jako tuottaa symmetrisen epäyhtälön. Kysytty M on hiukan yllättäen $\dfrac{9\sqrt{2}}{32}$, eikä ääriarvotilanne tule silloin, kun a, b ja c ovat yhtä suuria. Tehtävän 6 monimutkainen ratkaisu edellytti jonkin verran lukuteoreettistenkin keinojen käyttöä.

Tehtävien vaikeusjakauma tuotti ymmärrettävästi varsin paljon kokonaissuorituksia, joiden pistemäärä oli lähellä 14:ää. Tuomaristo joutui lievästi rikkomaan itse asettamansa säännön, jonka mukaan mitaleita jaettaisiin enintään puolelle kilpailijoista. Mitalisuorituksen alarajaksi tuli 15 pistettä. Hopeamitali irtosi jo 19:llä pisteellä ja kultamitali 28:lla. (Periaate on, että mitalisteista kuudennes palkittaisiin kultamitalilla ja kolmannes hopeamitalilla.) Kaikki kuusi tehtävää ratkaisi oikein kolme kilpailijaa, yksi Kiinasta, yksi Moldovasta ja yksi Venäjältä.

Maiden välisen epävirallisen kilpailun paras oli totuttuun tapaan Kiina. Korean kolmas sija oli jossain määrin yllättävä; se on osoitus Korean merkittävästä matematiikkapanostuksesta. Euroopan maista Italian hyvä menestys oli odotusten vastainen.

Suomea edusti kokenut joukkue. *Matti Lehtisen* ja *Anne-Maria Ernvall-Hytösen* johtaman kuusikon jäsenistä *Eemeli Blåsten* (Helsingin matematiikkalukio), *Sebastian Dumitrescu* (Tampereen lyseo), *Janne Kokkala* (Päivölän Opisto), *Ville Pettersson* (Someron lukio) ja *Esa Vesalainen* (Helsingin matematiikkalukio) olivat kaikki ainakin toisissa olympialaisissaan ja *Jukka Sireni* (Lahden yhteiskoulu) on hänkin pitkään osallistunut matematiikan olympiavalmennustilaisuuksiin. Joukkueen menetys oli ennakko-odotusten mukainen. Vesalainen, Dumitrescu, Pettersson ja Sireni saivat pronssimitalin ja Blåsten ja Kokkala kunniamaininnan. Yhtä runsas mitalisaalis on edellisen kerran saatu vuonna 1997 Argentiinassa pidetyissä olympialaisissa. Joukkueen pisteet oikeuttivat maiden paremmuusjärjestyksessä sijalle 39. Suomi oli paras Pohjoismaa.

Saavutettu menestys perustuu pitkäjänteiseen työhön. Joukkueen jäsenet ovat osallistuneet aktiivisesti Suomen matemaattisen yhdistyksen valmennusjaoston ja Päivölän opiston järjestämiin viikonloppuvalmennuksiin kahden vuoden aikana. Varsinainen viikon mittainen valmennus- ja valintaleiri pidettiin Päivölän opistossa toukokuussa. Joukkueen valmennukseen ovat osallistuneet *Kerkko Luosto*, *Antti Honkela*, *Jouni Seppänen* ja *Lauri Hallila* sekä jo mainitut joukkueenjohtajat. Päivölän opiston yhdyshenkilö matematiikan valmennustoiminnassa on ollut matematiikkalinjan johtaja *Merikki Lappi*.

Slovenialaiset järjestelyt olivat moitteettomat. Kilpailun arvostusta osoittaa, että kilpailun kunniatoimikunnan puheenjohtaja oli Slovenian presidentti *Janez Drnovšek* ja että Slovenian parlamentin puhemies *France Cukjati* isännöi henkilökohtaisesti tuomaristolle järjestettyä vastaanottoa. Päättäjäisten pääpuhuja oli Euroopan Unionin tiede- ja tutkimuskomissaari *Janez Potočnik*.

Matematiikkaolympialaisten tehtävät ja tulokset sekä paljon muuta materiaalia löytyy kilpailujen kotisivuilta `http://imo2006.dmfa.si/`.

Ensi heinäkuun lopussa järjestetään 48. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset. Kilpailunäyttämö on tuolloin Hanoi, Vietnam.