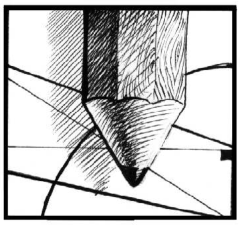


Maailman korkein vuori

Pekka Alestalo
Teknillinen korkeakoulu

Maailman korkein vuori on Mount Everest Nepalissa – kaikkihan sen tietävät. Korkeus 8 848 m ja sillä selvä. Olkoon niin – mutta millä perusteella?

Vuorten ja muun maanpinnan korkeutta mitataan yleisesti hyväksytyn periaatteen mukaisesti merenpinnan tasosta laskien. Määritelmän mukaan merenpinta on siis korkeudella 0 m. Mutta missä tämä kuuluisa merenpinnan taso oikein sijaitsee, ja mitä merkitystä sillä on vuorten korkeuteen? Kysymys ei ole aivan yksinkertainen, ja monille voi tulla yllätyksenä esimerkiksi se, ettei Mount Everestin huippu olekaan se Maan pinnan piste, joka on kauimpana Maan keskipisteestä!

Merenpinta

Missä siis sijaitsee merenpinnan taso? Hankala kysymys: merivirrat ja tuuli työntävät vettä epätasaisesti eri puolille Maapallon meriä, ne synnyttävät valtavia aaltoja, ja tilannetta sekoittaa vielä lisää joissakin paikoissa yli kymmenmetrinen vuoroveden vaihtelu. Lisäksi huomattava osa Maasta on merenpinnan yläpuolella, eikä merta ole kaikkialla edes näkyvissä.

Ongelman ydin ei kuitenkaan ole yllä mainituissa ilmiöissä, joiden vaikutus muutenkin on korkeintaan parikymmentä metriä. Merenpinnan korkeutta voidaan mitata eri puolilla maailmaa säännöllisin väliajoin, ja niistä keskiarvoja laskemalla satunnaisten (tuuli ja aallot) ja säännöllisten (merivirrat ja vuorovesi) ilmiöiden vaikutus voidaan melko hyvin poistaa. Näiden toimenpiteiden jälkeen paljastuu kuitenkin ongelman todellinen luonne: merenpinnan 0-tasoksi eri puolilla maailmaa saatuja pisteitä ei voi sijoittaa pallon pinnalle, mikä estää mm. jatkamasta merenpinnan tasoa yksinkertaisella tavalla mantereiden kohdalle. Vaikka merenpintaa yritettäisiin siitä huolimatta kuvata pallolla mahdollisimman hyvin (jossakin mielessä), niin osoittautuu, että tulos poikkeaa havainnoista jossakin päin meriä yli 10 km. Kun korkeimmatkin vuoret ovat alle 10 km ”korkeita”, ei näin suurta virhettä voida tietenkään hyväksyä.

Ellipsoidi

Tilanteen pelastaa pallon pintaa hieman monimutkaisempi kolmiulotteinen olio: ellipsoidi. Ellipsoidin kaksiulotteinen vastine on ellipsi, joka saadaan ympyrästä venyttämällä sitä tasaisesti kahteen toisiaan vastaan kohtisuoraan suuntaan. Jos siis lähdetään liikkeelle yksikköympyrästä

$$x^2 + y^2 = 1,$$

ja muuttujaa x venytetään kertoimella $a > 0$ ja vastaavasti muuttujaa y kertoimella $b > 0$, niin uusien muuttujien $X = ax$, $Y = by$ avulla lausuttuna ympyrän yhtälöstä saadaan ellipsin yhtälö

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Samaa periaatetta voidaan soveltaa yksikköpallon pintaan

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

joka siis esittää niiden pisteiden (x, y, z) joukkoa, joiden etäisyys origosta on täsmälleen 1. Venytysten $X = ax,\ Y = by,\ Z = cz$ jälkeen tuloksena on yhtälö

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

ja vastaava venytetty pallo on nimeltään ellipsoidi. Kertoimia a, b, c kutsutaan (ellipsiä mukaillen) puoliakseleiden pituuksiksi. Erikoistapauksessa $a = b$ kyseessä on pyörähdysellipsoidi, joka syntyy tavallisen xz-tason ellipsin (puoliakselien pituudet a ja c) pyörähtäessä z-akselin ympäri.

Osoittautuu, että nimenomaan pyörähdysellipsoidi kuvaa jossain mielessä parhaiten merenpinnan muotoa. Fysikaalinen syy liittyy tietysti Maan pyörimisliikkeeseen, mutta sen tutkiminen ei kuulu tämän kirjoituksen piiriin. Alkuperäinen tehtävämme–merenpinnan tason määrääminen–palautuu siihen, että on annettava mahdollisimman hyvin mittauksia vastaavat lukuarvot puoliakseleiden pituuksille a ja c sekä kiinnitettävä koordinaatisto. Merenpinnan taso on silloin, määritelmän mukaan, tämän ellipsoidin pinnalla, ja sitä kutsutaan *vertailuellipsoidiksi.* Tämäkään seikka ei ole aivan yksinkertainen; eri aikoina ja eri puolilla maailmaa on ollut käytössä monenlaisia valintoja näiden parametrien suhteen. Viime aikoina tilanne on kuitenkin standardisoitunut niin, että puoliakselin a pituudeksi on valittu $a = 6378{,}1370$ km ja toinen puoliakseli c määräytyy ellipsoidin litistyneisyydelle $f = 1 - c/a$ määrätystä arvosta $f = 1/297{,}257223563$. Tällöin siis

$$c = (1 - f)a \approx 6356{,}7523 \text{ km}.$$

Suomessakin siirryttiin äskettäin tämän standardin piiriin, mikä paransi mm. GPS-paikannuslaitteiden toimintatarkkuutta (tai ainakin helpotti tarkemman tuloksen määrittämistä).

Huomaamme joka tapauksessa, että puoliakseleiden pituudet erovat toisistaan yli 20 kilometrillä, joten napa-alueilla merenpinta on tämän verran lähempänä keskipistettä kuin päiväntasaajalla.

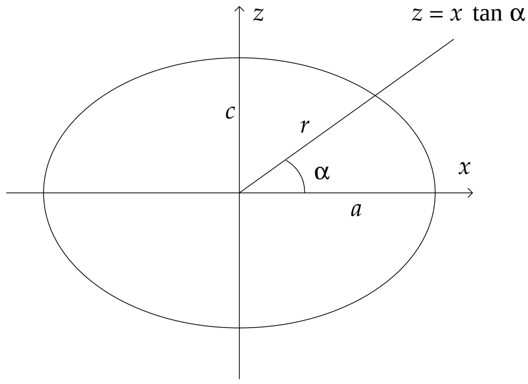
Korkeampaa matematiikkaa

Palataan maantieteeseen ja siihen, miten yllä oleva liittyy vuorten korkeuksiin. Haluamme erityisesti selvittää, mikä paikka Maapallolla on kauimpana keskipisteestä, ja onko se samalla myös korkeimmalla merenpinnasta. Vuorten korkeudet (merenpinnan tasosta!) löytyvät kartastoista, mutta etäisyydet keskipisteestä jodumme laskemaan itse.

Pyörähdyssymmetrian vuoksi tilanne palautuu kaksiulotteiseksi, ja laskemme aluksi, kuinka kaukana ellipsin piste on origosta, kun puoliakseleiden pituudet ovat a ja c, ja pisteen paikkavektori muodostaa x-akselin kanssa kulman α. Maapallon tapauksessa kulma α tarkoittaa päiväntasaajalta mitattua leveysastetta.

Tutkittava ellipsin piste (x, z) toteuttaa siis yhtälöparin

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = x \tan \alpha. \end{cases}$$



Jos rajoitumme symmetrian vuoksi tapaukseen $x \geq 0,\ z \geq 0$, niin yhtälölle saadaan yksikäsitteinen ratkaisu sijoittamalla z toisesta yhtälöstä ensimmäiseen. Tulokseksi saadaan

$$\begin{cases} x = x(\alpha) = \frac{ac}{\sqrt{c^2 + a^2 \tan^2 \alpha}} \\ z = z(\alpha) = \frac{ac \tan \alpha}{\sqrt{c^2 + a^2 \tan^2 \alpha}}. \end{cases}$$

Kyseisen pisteen etäisyys origosta on siis toiseen korotettuna

$$r(\alpha)^2 = x(\alpha)^2 + z(\alpha)^2 = \frac{a^2c^2(1 + \tan^2 \alpha)}{c^2 + a^2 \tan^2 \alpha}.$$

Käyttämällä kaavaa $1 + \tan^2 \alpha = 1/\cos^2 \alpha$ saadaan lopulta symmetriseltä näyttävä muoto

$$r(\alpha) = \frac{ac}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha}}.$$

Ja sitten vain laskemaan: Mount Everestille $\alpha = 27°59'$ N, joten sen huipun etäisyys keskipisteestä on suunnilleen (vrt. tehtävä 3 alla)

$$r(27{,}983°) + 8{,}848 \text{ km} \approx 6382{,}3 \text{ km}.$$

Tämän jälkeen herää kysymys, voisiko jonkin "matalamman", mutta lähempänä päiväntasaajaa sijaitsevan vuorenhuipun etäisyys olla yllä laskettua suurempi? Vastaus selviää vain kokeilemalla, ja esimerkiksi Equadorista löytyy Chimborazo-niminen vuori, jonka korkeus on 6 310 m ja leveysaste vain $1°27'$ S. Huipun etäisyys keskipisteestä on siis

$$r(1{,}450°) + 6{,}310 \text{ km} \approx 6384{,}4 \text{ km}.$$

Mutta tämähän on yli 2 km suurempi kuin Mount Everestin huipulle!

Lisätutkimukset eivät muuta enää tilannetta: maksimi saavutetaan Chimborazon kohdalla, ja tässä mielessä sekin on siis ansainnut maailman korkeimman vuoren nimen. Itse asiassa Himalajan alue oli vielä kaksisataa vuotta sitten niin huonosti tunnettu, että v. 1802 Chimborazon valloitusta yrittäneen tutkimusmatkailija *Alexander von Humboldtin* aikoihin sitä pidettiin maailman korkeimpana vuorena. Chimborazon huipun valloitti ensimmäisenä (eurooppalaisena) *Edward Whymper* v. 1880.

Chimborazo (*Heikki Apiola* 2006)

Tehtäviä

1. Kuinka paljon Haltin (1 328 m, 69°18′ N) etumatka kutistuu esim. Taivaskeroon (807 m, 68°04′ N) verrattuna, jos tarkastellaan huippujen etäisyyttä Maan keskipisteestä?

2. Vertaa Kilimanjaron (5 895 m, 3°04′ S) huipun etäisyyttä Chimborazon ja Mount Everestin arvoihin.

3. Kuinka paljon merenpinnan taso lähestyy Maan keskipistettä, kun siirrytään yksi aste pohjoiseen a) päiväntasaajalta; b) Helsingistä (n. 60° N)?

4. (Vaikeampi?) Vuorten korkeus mitataan kohtisuoraan vertailuellipsoidin pinnasta, mutta Maan keskipisteestä vertailuellipsoidille tuleva jana ei ole kohtisuorassa ellipsoidia vastaan muualla kuin navoilla ja päiväntasaajalla. Tämän vuoksi yllä lasketut etäisyyksien summat olisi pitänyt käsitellä tarkemmin kolmioiden avulla. Osoita esim. Mount Everestin tapauksessa, etteivät tulokset poikkea olennaisesti toisistaan.

5. (Pohdiskelua) Kun vuorikiipeilijöiden tavoitteena on kiivetä mahdollisimman korkeille (merenpinnasta mitattuna) vuorille, niin eikö liikkeelle pitäisi myös lähteä kävellen meren rannalta? Onko Base Camp -kiipeily moraalisesti arveluttavaa?