Kilpailumatematiikkaa

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Vuoden 2006 Pohjoismainen matematiikkakilpailu pidettiin 30. maaliskuuta kotirataotteluna kaikissa viidessä Pohjoismaassa. Kilpailu on kutsukilpailu, ja kukin maa saa nimetä osallistujiksi enintään 20 matematiikkaolympialaisiin valmennettavaa koululaista. Tehtävät laadittiin ja vastaukset arvosteltiin tänä vuonna Tanskassa. Kilpailutehtävät ja niiden ratkaisut löytyvät mm. linkistä `http://www.math.helsinki.fi/~smy/olympia/PM/nmc94_06.pdf`. Kilpailun voitti Norjan Jørgen Rennemo, mutta kymmenen parhaan joukossa oli neljä Suomen edustajaa: Sebastian Dumitrescu (Tampereen lyseo) jaetulla toisella, Esa Vesalainen (Helsingin matematiikkalukio) ja Janne Kokkala (Päivölän opisto) jaetulla neljännellä sekä Ville Pettersson (Someron lukio) jaetulla kahdeksannella sijalla.

Toinen kevään matematiikkakilpailutapahtuma oli Päivölän opistossa 22. huhtikuuta 2006 toisen kerran järjestetty Pythagoraan Polku -joukkuematematiikkakilpailu. Kilpailuun osallistui kaikkiaan 12 nelihenkistä lukiolaisjoukkuetta Helsingistä, Espoosta, Tampereelta, Nurmosta, Porista, Hämeenlinnasta ja Päivölästä. Kilpailijat ratkaisivat joukkueina kolmessa tunnissa kaikkiaan 20 tehtävän sarjaa. Kilpailun epävirallisen luonteen vuoksi sen tuloksia ei julkisteta. Solmu julkaisee ohessa Pythagoraan polun tehtävät. Ratkaisuihin palataan myöhemmin.

1. Neljä avaruuden pistettä, A, B, C ja O sijaitsee niin, että $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$ ja $\angle AOC = \gamma$, $\angle ABC = \angle ABO = \angle OBO = 90°$. Todista, että $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

2. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ jatkuvasti derivoituva funktio, jolle $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ ja kaikille $x \in [0, 1]$ pätee

$$\frac{1}{f(x)} < f'(x).$$

Todista, että

$$\int_0^1 f(x)\,dx < \frac{7}{3}.$$

3. Määritä kaikki derivoituvat funktiot f, jotka toteuttavat seuraavat ehdot: kaikilla reaaliluvuilla x ja y pätee $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$. Lisäksi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kahdesti jatkuvasti derivoituva ja $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että kaikilla x pätee

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f(t)(x-t)\,dt.$$

5. Määritä funktion $f(x) = \sqrt[x]{x}$ ääriarvot välillä $[\frac{1}{2}, \infty[$.

6. Olkoot $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ ja $ax^2 + bxy + cy^2$ lausekkeita, jotka ovat positiivisia kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$ ja joiden suhde ei ole vakio. Todista, että $(aB - bA)x^2 + 2(aC - cA)xy + (bC - cB)y^2$ saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

7. Todista, että konveksin (kuperan) monikulmion ympäri voidaan piirtää suunnikas, jonka pinta-ala on korkeintaan kaksi kertaa niin suuri kuin monikulmion.

8. Päivolään tullessa eräs lukiolainen tulee aina samalla junalla ja hänet haetaan juna-asemalta aina täsmälleen junan tullessa. Kerran tämä lukiolainen tulikin asemalle junalla joka oli asemalla tasan tuntia ennen kuin juna millä hän yleensä tulisi. Lukiolainen lähti kävelemään asemalta kohti kotia ja jonkin ajan kuluttua häntä hakemaan lähtenyt auto tuli vastaan ja vei kävelijän Päivolään 10 minuuttia etuajassa. Eräänä toisena päivänä tämä sama päivöliini tuli asemalle tasan puoli tuntia etuajassa ja lähti taas kävelemään hakijaansa vastaan. Kuinka monta minuuttia etuajassa hän nyt saapui Päivolään?

9. Kuutio värjätään kuudella eri värillä, yksi väri kutakin tahkoa kohti. Kuinka monella eri tavalla kuutio voidaan tällöin värjätä, jos kaksi värjäystä ovat samoja silloin, kun ne voidaan saada toisistaan kääntämällä kuutio?

10. Kolme r-säteistä ympyrää sijaitsee siten, että kunkin kehä kulkee kahden muun ympyrän keskipisteen kautta. Laske ympyröiden yhteisen osan pinta-ala.

11. Kolmiot ABC ja DEF ovat yhteneviä, ja pisteiden A, B, C ja D, E, F kiertosuunta on sama. Sivut AB ja DE eivät ole yhdensuuntaisia. Osoita, että janojen AD, BE ja CF keskinormaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

12. Kuperan nelikulmion vastakkaisten sivujen keskipisteiden yhdistysjanat jakavat nelikulmion neljäksi osanelikulmioksi. Todista, että kahden sellaisen osanelikulmion, joilla ei ole yhteisiä sivuja, alojen summa on sama kuin toisen samanlaisen osanelikulmioparin nelikulmioiden alojen summa.

13. Neljä pistettä sijaitsee avaruudessa, ja ne eivät sijaitse samassa tasossa. Kuinka monta tasoa voidaan laittaa tähän avaruuteen niin, että kaikki neljä pistettä ovat yhtä etäällä tasosta?

14. Kuinka monta kertaa täytyy heittää kolikkoa, että todennäköisyys kolmelle peräkkäiselle klaavalle on vähintään 25 %?

15. Jana katkaistaan kolmeen palaan kahdesta satunnaisesta kohdasta. Mika on todennäköisyys, että saaduista kolmesta palasta voidaan muodostaa kolmio?

16. 1500 km levyisen aavikon vastakkaisilla laidoilla on kaupungit. Kuorma-auto lähtee toisesta kaupungista liikkeelle ja yrittää päästä vastakkaiseen kaupunkiin. Kuorma-auto pystyy kantamaan mukanaan polttoainetta 900 km pituiseen matkaan kerrallaan. Kuorma-auto voi jättää kuinka suuren tahansa osan lastistaan aavikolle varastoksi, josta se voi täydentää tankkiaan kun tarvitsee. Jos oletamme, että polttoainetta ei häviä lainkaan varastoinnin aikana, niin kuinka kuorma-auto pääsee aavikon yli toiseen kaupunkiin mahdollisimman vähällä polttoaineen kulutuksella? Kuinka paljon polttoainetta tarvitaan?

17. Määritellään jono (a_n) asettamalla $a_0 = 0$ ja $a_{n+1} = 3a_n + 1$, kun $n > 1$. Osoita, että a_{2010} on jaollinen 121:llä.

18. Positiiviset kokonaisluvut x, y ja z toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} x^2 &= 2(y+z), \\ x^6 &= y^6 + z^6 + 31(y^2 + z^2). \end{cases}$$

Määritä x, y, z.

19. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ on jaollinen 10:llä.

20. Kaksi pelaajaa pelaa peliä kirjoittamalla vuorotellen taululle positiivisia kokonaislukuja, jotka ovat korkeintaan k. Jo kirjoitetun luvun tekijää ei saa kirjoittaa. Pelin häviää se, joka ei enää voi kirjoittaa lukua. Millä k:n arvoilla pelin aloittava pelaaja voi aina voittaa pelin?