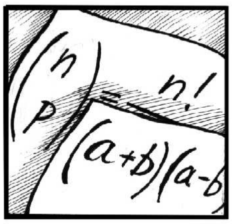

Suklaa, kauneus ja matematiikka

Tuomas Korppi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Ratkaisun löytäminen matemaattiseen probleemaan ei ole useinkaan helppoa. Tässä tekstissä kuvailen ajatusprosessin, jonka jouduin käymään läpi saadakseni ratkaistua Tommi Sottisen minulle esittämän kysymyksen.

Oletetaan, että meillä on $k \times l = n$ palan suklaalevy, joka pitäisi pilkkoa yhden palan kokoisiksi osiksi. Käytämme seuraavaa menetelmää:

Katkaisemme levyn palojen välistä (suoraviivaista) jakoviivaa pitkin, ja saamme kaksi osaa. Sen jälkeen valitsemme jonkun osan, ja katkaisemme sen palojen välistä jakoviivaa pitkin. Toistamme tätä osan valitsemista ja sen halkaisemista, kunnes suklaa on täysin pilkottu.

Ylläesitetty pilkkomissysteemi jättää kuitenkin pilkkojalle valinnanvaraa. Hän voi esimerkiksi aloittaa halkaisemalla levyn joko pitkittäis- tai poikittaissuunnassa. Hän voi myös halkaista levyn keskeltä tai katkaista pelkästään yhden rivin levyn päästä. Pilkkoja on laiska, ja niinpä hän haluaisi saada levyn yhden palan kokoisiin osiin mahdollisimman vähällä työllä. Kuinkahan hänen kannattaisi käyttää pilkkomissysteemin jättämä valinnanvara?

> **Kysymys:** Kuinka pilkkomiskohdat kannattaisi valita, että suklaalevy saataisiin yhden palan kokoisiksi osiksi mahdollisimman vähillä pilkkomisilla? Kuinka monta pilkkomista tällöin tarvitaan?

Tietokoneohjelmoinnin matemaattisessa tarkastelussa törmätään usein ylläesitetyn kysymyksen kaltaisiin probleemoihin. Tietokone pitäisi saada ratkaisemaan haluttu ongelma mahdollisimman vähillä laskenta-askeleilla, ja usein käy niin, että ensiksi mieleen tuleva tapa ei ole nopein mahdollinen.

Tarkastellaan esimerkiksi listaa, jossa on n lukua suuruusjärjestyksessä, ja tietokone pitäisi ohjelmoida vastaamaan kysymykseen ”onko luku k listassa?” Voimme esimerkiksi kirjoittaa ohjelman, joka käy listan läpi alusta loppuun, ja jokaisen listan alkion kohdalla tarkastaa, onko kyseinen listan alkio k. Ohjelma toimii, mutta se joutuu tekemään pahimmillaan n askelta, yhden jokaista listan alkiota kohti.

Parempi tapa ratkaista ongelma onkin seuraava: Tarkastellaan ensin listan keskimmäistä alkiota[1]. Jos se on k, on ongelma ratkaistu. Jos se on suurempi kuin k, tarkastellaan jatkossa pelkästään listan alkupuolta. Jos se on pienempi kuin k, tarkastellaan jatkossa pelkästään listan loppupuolta. Seuraavaksi otetaan edellä valittu listan puolikas, ja sen keskimmäinen alkio. Jos se on k, on ongelma ratkaistu. Jos se on suurempi kuin k,

[1] Jos listassa on pariton määrä alkioita, on listassa yksikäsitteinen keskimmäinen alkio. Mikäli listassa on parillinen määrä alkioita, valitaan jompi kumpi kahdesta keskimmäisestä alkiosta. Menetelmän toimivuuden kannalta on yhdentekevää, kumpi valitaan.

tarkastellaan jatkossa pelkästään valitun listanpuolikkaan alkupuolta. Jos se on pienempi kuin k, tarkastellaan jatkossa pelkästään valitun listanpuolikkaan loppupuolta. Toistetaan sama valitulle listan neljäsosalle, sitten kahdeksasosalle, ja niin edelleen, kunnes k on löytynyt, tai valittu listan osa on huvennut tyhjiin (jolloin k ei ole listassa). Tällä menetelmällä vaaditaan enimmillään noin $\log_2 n$ laskenta-askelta: Jos listan pituus on esimerkiksi 65536 alkiota, askeleita on enimmillään vain 16, eli systeemi on huomattavan nopea.

Suklaalevyä voidaan puolitella hiukan samaan tapaan kuin taulukkoa yllä, joten matemaattisesti koulittu henkilö muodostaa lähes alitajuisesti seuraavan konjektuurin:

> Hyvällä taktiikalla vaadittu pilkkomisten määrä on jotakuinkin $\log_2 n$.

Havaitaan myös, että saman kokoisia, mutta eri muotoisia levyjä voidaan pilkkoa eri tavalla. 4×1-levystä voidaan ottaa yksi pala erilleen, mutta 2×2-levystä täytyy lohkaista kaksi palaa kerralla. Niinpä muodostamme seuraavan konjektuurin:

> Suklaalevyn muoto eli "geometria" vaikuttaa vaadittujen lohkomisten määrään.

Tämä on täysin normaali menetelmä probleemoja ratkaistessa: Ensin arvataan väittämiä, ja sitten yritetään todistaa ne. Tässä tapauksessa sankarimme ei kuitenkaan keksi, kuinka näitä konjektuureja voisi lähteä todistamaan.

Kun lennokkaat ideat eivät toimi, on aika palata maan tasalle. Otamme siis pieniä levyjä, ja tapaus tapaukselta katsomme läpi, kuinka monta pilkkomista ne vaativat. Tarkoituksena on nähdä, josko levyn koon/muodon ja vaaditun pilkkomisten määrän välille löytyisi jokin yhteys.

- 1×1-levy? Se on jo valmiiksi yhden palan kokoinen. Siis 0 pilkkomista.
- 2×1-levy? Sen voi pilkkoa vain yhdellä tavalla. Siis 1 pilkkominen.
- 2×2-levy? Ainoa tapa on pilkkoa ensin kahdeksi 2×1-levyksi, jotka pilkotaan sitten yhden palan kokoisiksi. Siis 3 pilkkomista.
- 4×1-levy? Nyt voidaan pilkkoa kahdella tavalla. Ensimmäinen vaihtoehto on pilkkoa ensin kahdeksi 2×1-levyksi, jolloin tilanne on sama kuin edellisessä tapauksessa. Toinen vaihtoehto on irroittaa ensin yksi pala, sitten yksi pala lisää, ja lopuksi halkaista 2×1-levy kahtia. Siis 3 pilkkomista kummallakin tavalla.
- 3×2-levy? Edelleen kaksi tapaa pilkkoa. Joko ensin kahdeksi 3×1-levyksi, jotka paloiksi, tai ensin kolmeksi 2×1-levyksi, jotka paloiksi. Molemmilla tavoilla 5 pilkkomista.

Kaikissa yllämainituissa tilanteissa kävi niin, että n palan levyn paloittelu vaati $n-1$ pilkkomista riippumatta levyn geometriasta tai valitusta pilkkomistaktiikasta. Tässä vaiheessa heitämmekin edelliset konjektuurit romukoppaan, ja yritämme todistaa uutta konjektuuria:

> Kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee, että n palan levyn paloittelu vaatii $n-1$ pilkkomista riippumatta levyn geometriasta tai valitusta pilkkomistaktiikasta.

Todistettaessa väittämiä kaikille luonnollisille luvuille kannattaa käyttää induktiota:

- *$n = 1$:* 1×1-levyn paloitteluun tarvitaan 0 pilkkomista. Siis väite pätee tässä tapauksessa.
- *$n > 1$ mielivaltainen, väite pätee kaikille luvuille m, jotka ovat pienempiä kuin n:* n palan kokoinen levy pilkotaan ensin kahteen osaan (1 pilkkominen!), kooltaan m, m'. Sitten m ja m' palan kokoiset osat pilkotaan yhden palan kokoisiksi. Tämä vaatii $m-1$ ja $m'-1$ pilkkomista induktio-oletuksen nojalla (ja on riippumaton pilkkomistaktiikasta). Yhteensä siis tehdään $(m-1)+(m'-1)+1 = m+m'-1 = n-1$ pilkkomista. Induktio valmis.

Nyt olemme todistaneet konjektuurimme. Induktiotodistuksissa on yleensä yksi ikävä piirre. Ne kertovat meille, *että* väite pätee, mutta ne eivät kerro meille, *miksi* se pätee. Löytyisiköhän konjektuurillemme toinen todistus, joka auttaisi meitä hahmottamaan tilanteen paremmin?

n palan kokoisen levyn paloitteleminen vaatii $n-1$ pilkkomista. Olisikohan prosessin vaiheilla jokin sellainen ominaisuus, joka kasvaa pilkkomisen myötä? Siis niin, että alussa tuo ominaisuus olisi yksi, yhden pilkkomisen jälkeen kaksi, kahden pilkkomisen jälkeen kolme ja niin edelleen, ja kokonaan paloitellulla levyllä n?

Tässä vaiheessa ratkaisija lyö otsaansa. Tällainen ominaisuus on tietysti olemassa, nimittäin suklaapalasten määrä!

Niinpä saamme konjektuurillemme seuraavan todistuksen:

> Alussa suklaa on yhdessä klöntissä, ja haluttua lopputilaa luonnehtii se, että suklaa on n osassa. Jokainen pilkkominen kasvattaa osien määrää yhdellä (riippumatta valitusta pilkkomistaktiikasta), joten n osaan pääseminen vaatii $n - 1$ pilkkomista.

Matematiikassa on kauneutta. Matemaattinen kauneus ei kuitenkaan synny kauniista käsialasta tai sulavasti piirretyistä summamerkeistä, vaan se on ennemmin samaa lajia kuin hyvän vitsin aiheuttama esteettinen mielihyvä: Tilanne ratkeaa, kun se nähdään uudessa, yllättävässä valossa.

Epilogi: Tässä tapauksessa osoittautui, että vaadittu pilkkomisten määrä ei ollutkaan suklaalevyn koon logaritmi, vaikka aluksi niin yritinkin osoittaa. Pilkkomisongelman kysymyksenasettelua voidaan kuitenkin muuttaa niin, että ”pilkkomisten määrä on jotakuinkin suklaalevyn koon logaritmi” on oikea vastaus. Keksiikö lukija, millaisia operaatioita suklaalevyn pilkkojalle pitäisi sallia, että hän saisi suklaan pilkottua yhden palan kokoisiin osiin ajassa, joka on jotakuinkin logaritmi levyn koosta? Millaisilla levyillä pilkkomisten määrä on tarkalleen $\log_2 n$?