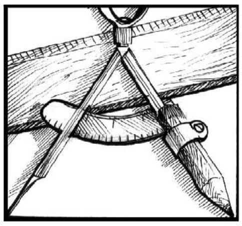

Kaikki tarpeellinen kompleksiluvuista

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Kompleksiluvut ovat poistumassa lukion matematiikan opetussunnitelmista. Ne ovat kuitenkin keskeinen osa matematiikan perustyökalustoa. Tässä artikkelissa kootaan tiiviiseen muotoon perustiedot kompleksiluvuista, johdatellaan eräiden kompleksisten funktioiden pariin, esitellään muutama kompleksilukujen geometrinen sovellus, analyyttisen geometrian perusobjektien ja geometristen peruskuvausten kompleksilukuversiot ja lopuksi hahmotellaan algebran peruslauseen todistus. Tämä lause on implisiittisesti mukana, kun esimerkiksi polynomien jaollisuutta tarkastellaan, mutta sen todistamista on pidetty liian haastellisena koulumatematiikkaan.

Artikkelin lopussa on muutama tehtävä. Niiden ratkaisut esitetään seuraavassa Solmun numerossa. Kirjoittajaa on paikoin inspiroinut Marian Dincăn ja Marcel Chiriţăn teos *Numere Complexe în Matematica de Liceu* (Bukarest 1996).

Perusteoriaa ja geometriaa

Kompleksilukujen algebraa

1. Lukuparien joukossa $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ määritellään

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y'),\\ (x, y)(x', y') &= (xx' - yy', xy' + x'y).\end{aligned}$$

Näin $\mathbb{R}^2$:sta tulee algebrallinen *kunta* $\mathbb{C}$, jossa yhteenlaskun neutraalialkio on $(0, 0)$, alkion (x, y) vasta-alkio on $(-x, -y)$; kertolaskun neutraalialkio on $(1, 0)$ ja alkion $(x, y) \neq (0, 0)$ käänteisalkio on

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

$\mathbb{C}$:n alkiot ovat *kompleksilukuja*.

2. Kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = (x, 0)$, on laskutoimitukset säilyttävä bijektio. Näin ollen $\mathbb{R}' = f(\mathbb{R})$ on reaalilukujen joukon kanssa isomorfinen $\mathbb{C}$:n osajoukko. Merkitään $(x, 0) = x$ ja samastetaan $\mathbb{R}'$ ja $\mathbb{R}$. Täten $\mathbb{C}$ on $\mathbb{R}$:n laajennus.

3. Koska $(0, 1)(y, 0) = (0, y)$, on $(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + (0, 1)y$. Merkitään $(0, 1) = i$. Silloin $(x, y) = x + yi$.

Jos $z = x + yi$, merkitään $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$.

Kertolaskun määritelmän mukaan $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. Kompleksilukujen kertolasku voidaan suorittaa reaalilukujen laskutoimituksin lisäyksellä $i^2 = -1$. Kompleksilukua i sanotaan *imaginaariyksiköksi*.

4. Kompleksiluvun $z = x + yi$ *liittoluku* eli *konjugaatti* on $\overline{z} = x - yi$. Liittoluvun muodostus noudattaa sääntöjä $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$. Luvun $z = x + yi$ itseisarvo eli *moduli* on reaaliluku $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pätee $|z|^2 = z\overline{z}$, josta seuraa mm.

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \quad \text{ja} \quad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Kompleksilukujen geometrinen esitys

5. Koska (joukkoina) $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{C}$ ovat samat, kompleksiluku $z = (x, y) = x + iy$ voidaan samastaa tason koordinaattipisteen $P = (x, y)$ tai origon O tähän koordinaattipisteeseen yhdistävän vektorin $\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ kanssa. Kompleksilukujen yhteenlaskua vastaa vektorien yhteenlasku ja kertolaskua, jossa toinen tulon tekijä on reaaliluku, vektorin kertominen reaaliluvulla. Joukko $\mathbb{R}$ on tässä mallissa x-akseli. Selvästi $|\overrightarrow{OP}| = |z|$.

6. Positiivisen x-akselin ja vektorin $\overrightarrow{OP}$ välinen x-akselista positiiviseen kiertosuuntaan mitattu kulma on kompleksiluvun z *argumentti* $\arg z$. Koska $x = \operatorname{Re} z = |z|\cos(\arg z)$ ja $y = \operatorname{Im} z = |z|\sin(\arg z)$, on

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)) \\ &= |z|(\cos(\arg z + 2n\pi) + i\sin(\arg z + 2n\pi)). \end{aligned}$$

Nähdään heti, että $\arg(\overline{z}) = 2\pi - \arg z = -\arg z \pmod{2\pi}$.

7. Jos $z_1 = |z_1|(\cos t_1 + i\sin t_1)$ ja $z_2 = |z_2|(\cos t_2 + i\sin t_2)$, niin

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|(\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2 \\ &\quad + i(\cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2)) \\ &= |z_1||z_2|(\cos(t_1 + t_2) + i\sin(t_1 + t_2)) \end{aligned}$$

Tästä seuraa $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ ja $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$. Tulos yleistyy induktiolla tuloon, jossa on mielivaltainen määrä tekijöitä. Tästä seuraa erityisesti, että jos $z = r(\cos t + i\sin t)$, niin $z^n = r^n(\cos nt + i\sin nt)$, kun $n \in \mathbb{N}$ (*de Moivren* kaava). Osamäärälle saadaan

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

Kompleksiset juuret sekä eksponentti- ja logaritmifunktio

8. Jos $\sqrt[n]{a}$ on luku, jolle $(\sqrt[n]{a})^n = z$, ja jos $a = r(\cos t + i\sin t)$ niin jokainen luvuista

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{t + 2k\pi}{n}\right), \tag{1}$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$, voi olla $\sqrt[n]{a}$. Luvut (1) ovat yhtälön $z^n = a$ ratkaisut.

Esimerkkejä. $\sqrt[3]{1}$ on joko 1, $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ tai $\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\sqrt{i}$ on joko $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}$ tai $\cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$.

9. Koska

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \\ &\quad \cdots + i(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots) \\ &= \cos t + i\sin t, \end{aligned}$$

voidaan kirjoittaa $z = r(\cos t + i\sin t) = re^{it}$ (Eulerin kaava).

10. Edellisen perusteella $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$. Siis $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$ ja $\arg e^z = y = \operatorname{Im} z$. (Voidaan osoittaa, että sarjan avulla määritelty kompleksinen eksponenttifunktio toteuttaa samat laskusäännöt kuin reaalinen eksponenttifunktiokin.) Olkoon $w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi)$ mielivaltainen kompleksiluku. Yhtälö $e^z = w$ merkitsee, että $e^x = |w|$ eli $x = \ln|w|$ ja $y = \arg w \pmod{2\pi}$. Kompleksiluvun w logaritmilla $\log w$ on siten äärettömän monta arvoa: $\log w = \ln|w| + i\arg w + 2n\pi i$. Arvoista yksi on aina valittavissa niin, että sen imaginaariosa on välillä $[0, 2\pi[$. Ne logaritmin ominaisuudet, jotka ovat seurausta eksponenttifunktion laskusäännöistä, periytyvät sellaisinaan kompleksisille logaritmeille. Siten mm.

$$\log(w_1 w_2) = \log w_1 + \log w_2.$$

Esimerkkejä. Koska $\arg(-1) = \pi$, $\log(-1) = i\pi + 2n\pi i$. $\log(ei) = 1 + \frac{i\pi}{2} + 2n\pi i$.

11. Yleinen potenssi z^w määritellään nyt lukuna $e^{w\log z}$. Potenssilla on yleensä äärettömän monta eri arvoa.

Esimerkki. $i^i = e^{i\log i} = e^{i(i\frac{\pi}{2}+2n\pi)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2n\pi}$. Luvun i^i likiarvoja ovat siten esim. 0,00000000135 ($n = 3$), 0,20788 ($n = 0$) ja 17093171649 ($n = -4$).

Kompleksitason geometriaa

12. Jos $z = x + yi$ on kompleksitason piste, niin $\overline{z} = x - yi$ on z:n symmetriapiste x-akselin suhteen, $-z = -x - yi$ on z:n symmetriapiste origon suhteen ja $-\overline{z} = -x + yi$ on z:n symmetriapiste y-akselin suhteen.

13. Jos z_1 ja z_2 ovat kompleksitason pisteitä, niin z on samalla suoralla kuin z_1 ja z_2, jos ja vain jos jollain reaaliluvulla k on

$$\frac{z - z_2}{z - z_1} = k$$

eli

$$z = \frac{z_2 - kz_1}{1 - k}. \tag{2}$$

Jos $k < 0$, z on pisteiden z_1 ja z_2 välissä, jos $0 < k < 1$, z_2 on z:n ja z_1:n välissä, ja jos $1 < k$, z_1 on z:n ja z_2:n välissä. Yhtälön (2) kanssa yhtäpitäviä samalla suoralla olemisen ehtoja ovat

$$z = pz_1 + qz_2, \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad p + q = 1$$

ja

$$az + bz_1 + cz_2 = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a + b + c = 0,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

Esimerkki. Janan $[z_1, z_2]$ keskipisteessä $k = -1$, joten keskipiste on $z_M = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$. Jos z_3 on kolmas piste, kolmion, jonka kärjet ovat z_1, z_2 ja z_3 painopiste on se piste, jossa jana $[z_3, z_M]$ jakautuu suhteessa $2 : 1$; tämä piste on ($k = -\dfrac{1}{2}$)

$$z_G = \frac{z_M + \frac{1}{2}z_3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3)}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

14. Pisteet z_1, z_2, z_3 ja z_4 ovat samalla ympyrällä, jos ja vain jos joko $\arg\dfrac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} = \arg\dfrac{z_4 - z_3}{z_2 - z_3}$ tai $\arg\dfrac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} + \arg\dfrac{z_2 - z_3}{z_4 - z_3} = \pi$. Tämä merkitsee, että *kaksoissuhde*

$$\frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_4 - z_3} = \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} : \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_3}$$

on reaalinen. Jos suhde on reaalinen, pisteet z_1, z_2, z_3 ja z_4 ovat samalla ympyrällä tai samalla suoralla. Jos pisteet eivät ole samalla suoralla ja kaksoissuhde on negatiivinen, nelikulmio $z_1z_2z_3z_4$ on kupera ja sen ympäri voidaan piirtää ympyrä.

15. Olkoon $z_1z_2 \ldots z_n$ kupera positiivisesti suunnistettu monikulmio kompleksitasossa. Merkitään $z_{n+1} = z_1$. Osoitetaan, että monikulmion pinta-ala on

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}\overline{z}_k\right).$$

Tämä nähdään seuraavasti: Ensinnäkin jokaiselle kompleksiluvulle z on

$$\overline{z\sum_{k=1}^{n}\overline{z}_k + \overline{z}\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}} = \overline{z}\sum_{k=1}^{n} z_k + z\sum_{k=1}^{n}\overline{z}_{k+1},$$

joten edellisen yhtälön lauseke on aina reaalinen. Tästä seuraa

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}(z_{k+1} + z)(\overline{z}_k + \overline{z})\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}\overline{z}_k\right) + \mathrm{Im}\left(z\sum_{k=1}^{n}\overline{z}_k + \overline{z}\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}\right)\\
&\qquad + \mathrm{Im}(n|z|^2) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}\overline{z}_k\right).
\end{aligned}$$

Koska pinta-alaksi väitetyn summan arvo ei muutu,kun jokaiseen z_k:hon lisätään z, voidaan monikulmio siirtää niin, että origo on sen sisäpuolella. Jos nyt $z_k = r_k(\cos t_k + i\sin t_k)$, on $\mathrm{Im}(z_{k+1}\overline{z}_k) = r_{k+1}r_k\sin(t_{k+1} - t_k)$ eli kaksi kertaa sen kolmion ala, jonka kärjet ovat O, z_k ja z_{k+1}. Koska koko monikulmion ala saadaan laskemalla yhteen kaikkien kolmioiden Oz_kz_{k+1} alat, väite seuraa.

16. Samoin suunnistetut kolmiot $A_1A_2A_3$ ja $B_1B_2B_3$ ovat yhdenmuotoiset, jos (esim.)

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3} \quad \text{ja} \quad \angle A_2A_1A_3 = \angle B_1B_2B_3.$$

Jos pistettä A_i (B_i) vastaa kompleksiluku a_i (b_i), niin yhdenmuotoisuusehdoista edellinen sanoo, että kompleksiluvuilla $\dfrac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}$ ja $\dfrac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$ on sama moduli, jälkimmäinen, että niillä on sama argumentti. Yhdenmuotoisuus vallitsee siis, jos (ja elleivät kolmiot surkastu, vain jos)

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}. \tag{3}$$

Jos kolmiot ovat vastakkaisesti suunnistetut, saadaan pari samoin suunnistettuja kolmioita peilaamalla toinen kolmio x-akselin yli. Yhdenmuotoisuusehto on tässä tapauksessa

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{\overline{b}_2 - \overline{b}_1}{\overline{b}_3 - \overline{b}_1}.$$

Yhtälö (3) voidaan kirjoittaa symmetriseen muotoon

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

[Oletamme kolmirivisten determinanttien perusominaisuudet tunnetuiksi; ne eivät riipu siitä, ovatko determinantin alkiot reaalisia vai kompleksisia.]

17. Jos kolmio $A_1A_2A_3$ on yhdenmuotoinen kolmion $A_2A_3A_1$ kanssa, se on tasasivuinen. Edellisin merkinnöin tämä toteutuu, kun

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Edellinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$ kanssa ja edelleen yhtälön

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2 = 0$$

kanssa.

Analyyttisen geometrian yhtälöiden kompleksimuotoja

18. Yhtälöparit

$$z = x + iy, \quad \overline{z} = x - iy$$

ja

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = -\frac{i}{2}(z - \overline{z})$$

ovat yhtäpitävät. Tätä tietoa hyväksi käyttäen relaatiot $f(x,\, y) = 0$ voidaan muuntaa relaatioiksi $\phi(z,\, \overline{z}) = 0$.

19. Suoran yhtälö $ax + by + c = 0$ muuntuu muotoon

$$\frac{a}{2}(z+\overline{z}) - \frac{bi}{2}(z-\overline{z}) + c = \frac{1}{2}((a-bi)z + (a+ib)\overline{z}) + c = 0$$

eli

$$\alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0, \tag{4}$$

missä c on reaaliluku. Jos suora kulkee pisteen z_0 kautta, on oltava $c = -\alpha z_0 - \overline{\alpha z_0}$. Suoran yhtälö on siis

$$\alpha(z - z_0) + \overline{\alpha}(\overline{z} - \overline{z}_0) = 0.$$

Jos z, z_1 ja z_2 eivät ole samalla suoralla, ne muodostavat kolmion, joka ei ole (suoraan) yhdenmuotoinen sen kolmion kanssa, jonka kärjet ovat $\overline{z}$, $\overline{z}_1$ ja $\overline{z}_2$. Edellä kolmioiden yhdenmuotoisuudesta tehty tarkastelu merkitsee, että pisteet ovat samalla suoralla, jos ja vain jos

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z_1 & z_2 \\ \overline{z} & \overline{z}_1 & \overline{z}_2 \end{vmatrix} = 0.$$

20. Suoran $\alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0$ eli $(\alpha + \overline{\alpha})x + i(\alpha - \overline{\alpha})y + c = 0$ kulmakerroin on

$$k = -\frac{\alpha + \overline{\alpha}}{i(\alpha - \overline{\alpha})} = i\frac{\alpha + \overline{\alpha}}{\alpha - \overline{\alpha}}. \tag{5}$$

Jos suoran ja x akselin välinen kulma on ϕ, niin $k = \tan\phi = \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$. Yhtälöstä (5) voidaan ratkaista

$$-\frac{\alpha}{\overline{\alpha}} = \frac{\cos\phi + i\sin\phi}{\cos\phi - i\sin\phi} = \frac{e^{i\phi}}{e^{-i\phi}} = e^{2\phi i},$$

ja edelleen

$$\phi = \frac{i}{2}\log\left(-\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\right).$$

Kahden eri suoran $\alpha z + \overline{\alpha z} + a = 0$ ja $\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + b = 0$ väliseksi kulmaksi saadaan

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{i}{2}\log\left(-\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\right) - \frac{i}{2}\log\left(-\frac{\overline{\beta}}{\beta}\right) = \frac{i}{2}\log\left(\frac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\beta}}\right).$$

Tästä saadaan suorien yhdensuuntaisuudelle ehto $\overline{\alpha}\beta = \alpha\overline{\beta}$ eli

$$\frac{\alpha}{\overline{\alpha}} - \frac{\beta}{\overline{\beta}} = 0$$

ja kohtisuoruudelle $\overline{\alpha}\beta = -\alpha\overline{\beta}$ eli

$$\frac{\alpha}{\overline{\alpha}} + \frac{\beta}{\overline{\beta}} = 0.$$

Ehto toteutuu esim. jos $\beta = i\alpha$.

21. Pisteen z_0 kautta kulkevan ja suoraa (4) vastaan kohtisuoran suoran yhtälöksi saadaan edellisestä

$$\alpha(z - z_0) - \overline{\alpha}(\overline{z} - \overline{z}_0) = 0.$$

Yhtälöparista

$$\begin{cases} \alpha z - \overline{\alpha z} &= \alpha z_0 - \overline{\alpha z_0}, \\ \alpha z + \overline{\alpha z} &= -c \end{cases}$$

saadaan pisteen z_0 kohtisuoraksi projektioksi suoralla (4)

$$z_1 = \frac{\alpha z_0 - \overline{\alpha z_0} - c}{2\alpha}.$$

Pisteen z_0 etäisyys suorasta (4) on

$$|z_0 - z_1| = \left|\frac{2\alpha z_0 - \alpha z_0 + \overline{\alpha z_0} + c}{2\alpha}\right| = \frac{|\alpha z_0 + \overline{\alpha z_0} + c|}{2|\alpha|}.$$

22. Pisteen z_0 kautta kulkeva kompleksiluvun w esittämän vektorin suuntaisen suoran pisteissä z on $z - z_0 = tw$, missä t on reaaliluku. Tämä merkitsee, että pisteissä toteutuu yhtälö

$$\frac{z - z_0}{w} = \frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{\overline{w}}$$

eli

$$\overline{w}z - w\overline{z} + w\overline{z}_0 - \overline{w}z_0 = 0.$$

Kun tätä verrataan yhtälöön (4) (jossa c on reaalinen!), saadaan $\alpha = i\overline{w}$.

23. Ympyrän $x^2+y^2+ax+by+c = 0$ yhtälöksi saadaan kuten kohdassa 19

$$z\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0, \tag{6}$$

missä $\alpha = \dfrac{1}{2}(a - ib)$. Jos ympyrän keskipiste on μ ja säde r, niin ympyrän yhtälö on myös

$$(z - \mu)(\overline{z} - \overline{\mu}) = r^2.$$

Siis $\alpha = -\overline{\mu}$ ja $c = |\mu|^2 - r^2$. Pisteen z_0 potenssi ympyrän (6) suhteen on

$$|z_0 - \mu|^2 - r^2 = z_0\overline{z}_0 + \alpha z_0 + \overline{\alpha z}_0 + c.$$

Tavalliset geometriset transformaatiot kompleksitasossa

24. Jos $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on jokin kompleksitason transformaatio, niin merkitään $T(z) = z'$, $T(z_k) = z'_k$ jne.

Tason *siirto* on kuvaus $T(z) = z + w$.

25. Tason *kierto* origon ympäri kulman ϕ verran vastapäivään on $T(z) = e^{i\phi}z$. Kierto pisteen w ympäri on $T(z) = w + e^{i\phi}(z - w) = e^{i\phi}z + w(e^{i\phi} - 1)$.

Olkoon $|a| = 1$, $a \neq 1$ ja $T(z) = az + b$. Silloin

$$T(z) = az + \frac{b}{a-1}(a - 1),$$

joten T on kierto pisteen $\dfrac{b}{a-1}$ ympäri. Kahden kierron yhdistäminen on kierto tai siirto: jos $T_1(z) = a_1z + b_1$, $T_2(z) = a_2z + b_2$ ovat kiertoja, niin $T_2(T_1(z)) = (a_2a_1)z + a_2b_1 + b_2$, missä $|a_1a_2| = 1$.

26. Kuvaus $T(z) = \overline{z}$ on *peilaus* x-akselin yli. Origon kautta kulkeva suora ℓ: $\alpha z + \overline{\alpha z} = 0$, on kohdan 22 mukaan vektorin $w = \dfrac{i\overline{\alpha}}{|\alpha|}$ suuntainen. Transformaatio

$$T(z) = w(\overline{\overline{w}z}) = w^2\overline{z} = -\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\overline{z}$$

koostuu kierrosta, jolla suora ℓ kääntyy x-akseliksi, peilauksesta x-akselin yli ja kierrosta, jolla x-akseli palautuu suoraksi ℓ. Transformaatio on siis peilaus suorassa ℓ. Yleinen suora $\alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0$ leikkaa x-akselin pisteessä $-\dfrac{c}{\alpha + \overline{\alpha}}$. Näin ollen peilaus tässä suorassa on

$$T(z) = -\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\left(\overline{z} + \frac{c}{\alpha + \overline{\alpha}}\right) - \frac{c}{\alpha + \overline{\alpha}}.$$

27. Origokeskinen *homotetia*, jossa homotetiasuhde on $k \in \mathbb{R}$, on $T(z) = kz$. Homotetia, jonka homotetiakeskus on w, on $T(z) = w + k(z - w) = kz + (1 - k)w$.

28. Olkoon $a = |a|e^{i\phi} \in \mathbb{C}$ mielivaltainen. Kuvaus

$$T(z) = az + b = a\left(z + \frac{b}{a}\right) = |a|\left(e^{i\phi}\left(z + \frac{b}{a}\right)\right)$$

on translaatiosta, kierrosta ja homotetiasta yhdistetty. Koska kukin näistä kuvaustyypeistä säilyttää kuvioiden yhdenmuotoisuuden, T on *yhdenmuotoisuuskuvaus*. Numeron 16 tarkasteluista seuraa, että jokainen yhdenmuotoisuuskuvaus on joko muotoa $T(z) = az + b$ tai $T(z) = a\overline{z} + b$.

29. *Inversio* origokeskisessä 1-säteisessä ympyrässä on kuvaus $T(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$. Inversio z_0-keskisessä ja r-säteisessä ympyrässä määrittyy kaavalla

$$T(z) = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}.$$

Algebran peruslause

30. Todistetaan *algebran peruslause*. Sen mukaan jokaisella polynomilla

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0,$$

missä kertoimet a_j ovat kompleksilukuja, on ainakin yksi nollakohta, ts. yhtälöllä $P(z) = 0$ on ainakin yksi ratkaisu. Todistus vaatii hiukan analyysin käsitteitä ja tietoja.

31. Kompleksilukujonolla z_j, $j = 1, 2, \ldots$, eli (z_j) on *raja-arvo* z, jos $|z_n - z|$ on mielivaltaisen pieni kaikilla tarpeeksi suurilla n:n arvoilla. (Tämä voidaan lausua täsmällisemminkin, mutta tarpeisiimme riittää tämä.) Jos P on polynomi, $w_j = P(z_j)$ ja jonolla (z_j) on raja-arvo z, niin jonolla (w_j) on raja-arvo $w = P(z)$. Tämä seuraa siitä, että

$$\begin{aligned} &|w_j - w| = |P(z_j) - P(z)| \\ &= |z_j^n - z^n + a_{n-1}(z_j^{n-1} - z^{n-1}) + \cdots + a_1(z_j - z)| \\ &= |z_j - z|Q(z_j, z). \end{aligned}$$

Kun j on tarpeeksi suuri, $|z_j - z|$ on pieni; tällöin lauseke $Q(z_j, z)$ on kiinteän ylärajan alapuolella, ja tulo $|z_j - z|Q(z_j, z)$ tulee sekin mielivaltaisen pieneksi.

32. Tarkastellaan kaikkien niiden reaalilukujen joukkoa E, jotka jollain z:n arvolla ovat muotoa $|P(z)|$. Luku x on E:n *alaraja*, jos jokainen E:n alkio on $\geq x$. Jokainen ei-positiivinen luku on E:n alaraja. Reaalilukujen perusominaisuuksia on, että E:n alarajojen joukossa on *suurin alaraja*. (Sitä kutsutaan myös E:n *infimumiksi* ja merkitään $\inf E$.) Olkoon tämä suurin alaraja a. Havaitaan, että jos $|P(z)| \neq a$, on olemassa $z' \neq z$ siten, että $|P(z')| < |P(z)|$. Jos nimittäin kaikilla $z' \in \mathbb{C}$ olisi $|P(z)| \leq |P(z')|$, olisi $|P(z)|$ a:ta suurempi E:n alaraja.

33. Osoitetaan, että jollain z_0 pätee yhtälö $|P(z_0)| = a$. Tehdään vastaoletus: $P(z) > a$ kaikilla z. Jos näin on, voidaan löytää luku z_1, jolle $|P(z_1)| < a + 1$ ja päättymätön lukujono (z_j), jolla on esim. ominaisuus $|P(z_{j+1})| - a < \frac{1}{2}(|P(z_j)| - a)$ ja siis myös $|P(z_j)| < a + \frac{1}{2^j}$. Koska

$$|P(z)| = |z|^n \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|$$

ja koska termit, joissa z on nimittäjässä, tulevat pieniksi, kun $|z|$ on suuri, niin $|P(z)|$ tulee suureksi, kun z on tarpeeksi suuri. Tästä seuraa, että kaikki jonon (z_j) luvut ovat jossain neliössä $Q = \{z \in C| - R < \operatorname{Re} z < R, -R < \operatorname{Im} z < R\}$. Jaetaan Q neljään yhtä suureen neliöön. Koska jonossa (z_j) on äärettömän monta lukua, jossain näistä neljästä neliöstä, esim. neliössä Q_1, on äärettömän monta luvuista z_j. Prosessia voidaan jatkaa: jos Q_1 jaetaan neljäksi neliöksi, jossain näistä, esim neliössä Q_2, on äärettömän monta luvuista z_j jne. Neliöt (Q_m) ovat sisäkkäin ja niiden sivujen pituudet ovat $\frac{1}{2^m}R$. Tästä seuraa, että neliöiden kärkipisteet muodostavat kompleksilukujonot, joilla on sama raja-arvo z_0. Lukujonosta (z_j) voidaan poimia ääretön osajono (z_{j_k}), jonka raja-arvo on myös z_0. Jonon $|P(z_{j_k})|$ raja-arvo on $P(z_0)$. Jos olisi $|P(z_0)| > a$, jouduttaisiin ristiriitaan ominaisuuden $|P(z_{j_k})| < a + \frac{1}{2^{j_k}}$ kanssa. Siis $|P(z_0)| = a$.

34. Osoitetaan vielä, että $a = 0$. Oletetaan, että näin ei ole, että $a > 0$ ja $P(z_0) = w_0 = a(\cos\phi_0 + i\sin\phi_0) = ae^{i\phi_0}$. Nyt voidaan kirjoittaa

$$P(z) = (z-z_0)^n + b_{n-1}(z-z_0)^{n-1} + \cdots + b_1(z-z_0) + w_0.$$

Olkoon k pienin indeksi, jolla $b_k \neq 0$. Silloin

$$P(z) = w_0 + b_k(z - z_0)^k(1 + Q(z)),$$

missä $Q(z)$ on polynomi, jonka arvot ovat pieniä, kun z on lähellä z_0:aa. Voidaan esimerkiksi valita niin pieni r, että kun $z = z_0 + re^{i\phi}$, niin $|Q(z)| < \frac{1}{2}$ ja samalla $2r^k|b_k| < a$. Näillä z:n arvoilla

$$P(z) = ae^{i\phi_0} + r^k|b_k||1 + Q(z)|e^{i(k\phi+\alpha+\beta(z))},$$

missä $\alpha = \arg b_k$ ja $\beta(z) = \arg(1 + Q(z))$. Tehdystä oletuksesta seuraa, että $|\beta(z)| < \frac{\pi}{4}$ ja $|1 + Q(z)| < 2$. Edelleen löytyy ϕ niin, että $k\phi + \alpha + \beta(z) = \phi_0 + \pi$. Mutta tällä ϕ:n arvolla

$$P(z) = P(z_0 + re^{i\phi}) = (a - r^k|b_k||1 + Q(z)|)e^{i\phi_0}$$

ja $|P(z)| < a$. Tultiin ristiriitaan sen kanssa, että a on $|P(z)|$:n arvojen alaraja. Siis vastaoletus onkin väärä, ja $P(z_0) = 0$. Algebran peruslause on todistettu.

Tehtäviä

35. Johda $\sin 6x$:n ja $\cos 6x$:n lausekkeet $\sin x$:n ja $\cos x$:n polynomeina.

36. Laske

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k.$$

37. Jos a ja b ovat kokonaislukuja, niin $z = a + ib$ on *kompleksinen kokonaisluku*. Jos kompleksista kokonaislukua z ei voida kirjoittaa muotoon $z = z_1z_2$, missä z_1 ja z_2 ovat kompleksisia kokonaislukuja $\neq 1$, niin z on *kompleksinen alkuluku*. Selvitä, mitkä joukon $\{3, 5, 7\}$ luvut ovat kompleksisia alkulukuja.

38. Selvitä, mitä tapahtuu suoralle ja ympyrälle inversiokuvauksessa.

39. Olkoon $\varepsilon \neq 1$ yhtälön $z^3 = 1$ jokin ratkaisu. Osoita, että pisteet z_1, z_2 ja z_3 ovat tasasivuisen kolmion kärjet jos ja vain jos

$$z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0.$$

40. Kuperan nelikulmion $ABCD$ sivuille piirretään (ulkopuolisesti) tasasivuiset kolmiot ABM, BCN, CDP ja DAQ. Osoita, että nelikulmioilla $ABCD$ ja $MNPQ$ on sama painopiste.

41. Selvitä, miten säännöllinen 5-kulmio voidaan konstruoida lähtemällä yhtälön $z^5 = 1$ ratkaisusta.