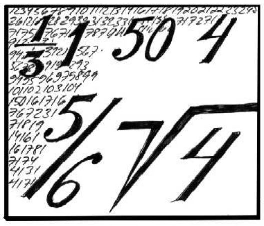

Neliöjuuri autiolla saarella

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Näppäillään luku laskimeen, painetaan $\sqrt{\ }$-näppäintä. Kirjoitetaan tietokoneohjelmaan komento SQRT. Jos kalenteria käännetään 40 vuotta taaksepäin, ollaan tilanteessa, jossa luku laskuviivaimen yläasteikolta ja katsotaan hiusviivan avulla samalla kohdalla oleva alemman asteikon luku tai etsitään taulukosta luvun logaritmi, jaetaan se kahdella ja katsotaan saatua neliöjuuren logaritmia vastaava luku, mantissa. Positiivisen luvun a neliöjuuren numeerinen määritys on tekniikan avulla yksinkertaista.

Entä jos apuvälineitä ei olisi? Jos olisimme haaksirikkoutuneet autiolle saarelle, laskimemme olisi tärveltynyt suolaisessa merivedessä ja – esimerkiksi Pythagoraan lausetta matkan mittaamiseen käyttääksemme – joutuisimme määrittämään neliöjuuria? Aina voi kokeilla. $14^2 = 196$ ja $15^2 = 225$. Siis $\sqrt{200} = 14, \ldots$. Edelleen $14{,}1^2 = 14^2 + 0{,}2 \cdot 14 + 0{,}1^2 = 198{,}81$ ja $14{,}2^2 = 14^2 + 0{,}4 \cdot 14 + 0{,}2^2 > 196 + 0{,}4 \cdot 10 = 200$. Siis $\sqrt{200} = 14{,}1\cdots$ jne. Newtonin likiarvomenettely on toimiva. Funktion $f(x)$ positiivinen nollakohta löytyy jostain umpimähkäisestä lähtöarvosta x_0 alkavan ja palautuskaavan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

määrittelemän lukujonon (x_n) raja-arvona. Kun funktioksi asetetaan $f(x) = x^2 - a$, palautuskaava saa muodon

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Huonostikin onnistuneen alkuarvauksen jälkeen algoritmi löytää oikeaan melko harvojen askelien jälkeen. Apuneuvoton saattaa kuitenkin tuskailla jakolaskujen kanssa: jakajissa voi olla paljon numeroita.

Vanhoissa, ennen elektroniikan läpimurtoaikoja kirjoitetuissa ja nykyisiä peruskoulun yläluokkia vastannutta keskikoulua varten tarkoitetuissa oppikirjoissa esitellään aivan yksinkertaiseen perusalgebraan nojautuva neliöjuurenottoalgoritmi. Pienoisgallup kertoi, että useimmat hiukan matematiikkaan suuntautuneetkaan aikuiset eivät sitä enää tunne. Koulun oppikirjoissa sitä ei enää ole. Algoritmi ei edelleenkään ole vailla mielenkiintoa, vaikkei neliöjuuren määrittäminen vain kynällä ja paperilla enää yleensä ole tarpeen. Katselemme nyt tätä algoritmia sekä kymmenjärjestelmän että binäärilukujen maailmassa. Jälkimmäiseen se näyttää sopivan erityisen hyvin.

Neliöjuuri kymmenjärjestelmässä

Algoritmin perusidea tulee esiin, jos mietimme, miten löydämme suurimman kokonaisluvun, jonka neliö on positiivista kokonaislukua a pienempi. Matemaattisin merkinnöin haemme lukua $\lfloor\sqrt{a}\rfloor$ eli luvun a, *juurrettavan*, neliöjuuren kokonaisosaa. Koska muistamme ulkoa kertotaulun, osaamme suoraan määrittää tämän luvun aina, kun a on pienempi kuin 100 eli kun a on enintään kaksinumeroinen luku. Oletetaan sitten, että $100 \leq a < 10000$, toisin sanoen että a on kolmi- tai nelinumeroinen. Silloin $10 \leq \sqrt{a} < 100$. Luku $\lfloor\sqrt{a}\rfloor$ on siis kaksinumeroinen. Voimme kirjoittaa $a = 100b + c$, missä b ja c ovat kaksinumeroisia, ja $\lfloor\sqrt{a}\rfloor = 10x + y$, missä $1 \leq x \leq 9$ ja $0 \leq y \leq 9$. Nyt

$$(10x + y)^2 = \lfloor\sqrt{a}\rfloor^2 \leq (\sqrt{a})^2 = a$$

eli

$$100x^2 + 20xy + y^2 \leq 100b + c.$$

Tehtäväksi tulee etsiä mahdollisimman suuret x ja y, joilla edellinen epäyhtälö toteutuu. Koska $c < 100$ ja $100(x+1)^2 > 100x^2 + 100$, mahdollisimman suuri x on mahdollisimman suuri ehdon $100x^2 \leq 100b$ eli $x^2 \leq b$ toteuttava luku. Kun nyt b on enintään kaksinumeroinen, x:n määrityksen ratkaisee kertotaulu. Jäljelle jää etsiä epäyhtälölle

$$20xy + y^2 \leq 100(b - x^2) + c$$

mahdollisimman suurta ratkaisua y. Epäyhtälön voi kirjoittaa muotoon

$$y(20x + y) \leq 100(b - x^2) + c.$$

Mitä oikeastaan etsitään? Etsitään numeroa y, joka liitettäisiin viimeiseksi numeroksi lukuun, jonka yksi tai kaksi ensimmäistä numeroa ovat muodostuneet siten, että yksinumeroinen luku x on kerrottu kahdella, niin että kun luku kerrottaisiin viimeisellä numerollaan, tulos ei ylittäisi kiinteätä enintään kolminumeroista lukua $100(b - x^2) + c$, joka puolestaan on muodostunut niin, että a:n ensimmäisestä tai ensimmäisistä numeroista on vähennetty x^2 ja erotuksen perään on kirjoitettu kahdeksi viimeiseksi numeroksi c. Etsitty y löytyy katsomalla tai tarvittaessa hiukan kokeilemalla.

Selvennetään tätä esimerkillä. Lasketaan luvun $\sqrt{1234}$ kokonaisosa. Tässä tapauksessa $b = 12$ ja $c = 34$. Suurin x, jolle $x^2 \leq 12$, on kertotaulun mukaan 3. Luku $100(b-x^2)$ on nyt $100(12-9) = 300$ ja $100(b-x^2)+c = 334$. Luku $20x = 10(x + x) = 60$. Haemme suurimman kymmentä pienemmän kokonaisluvun y, jolle $y \cdot (60 + y) \leq 334$. Ei ole vaikea nähdä, että 6 on liian suuri y:ksi, mutta 5 kelpaa. Suurin kokonaisluku $10x+y$, jonka neliö on pienempi kuin 1234, on siis 35. Kun suoritetaan vähennyslasku $334 - 6 \cdot 65 = 334 - 325 = 9$, saadaan luku, joka on sama kuin $1234 - 35^2 = 1234 - 1125$.

Itse asiassa puhuminen nelinumeroisesta luvusta on epäolennaista. Jos tiedämme positiivisen kokonaisluvun luvun b neliöjuuren kokonaisosan, siis luvun x_1, jolle pätee

$$x_1^2 \leq b < b + 1 \leq (x_1 + 1)^2,$$

löydämme aina luvun $100b + c$, missä $0 \leq c \leq 99$ neliöjuuren kokonaisosan edellä kuvatulla tavalla. Etsimme lukua muodossa $10x + y$, missä $0 \leq y \leq 9$. Lukujen x ja y tulee olla mahdollisimma suuria ehdon $(10x + y)^2 \leq 100b + c$ toteuttavia positiivisia kokonaislukuja. Tiedämme, että $(10x_1)^2 \leq 100b \leq 100b + c$ ja $(10(x_1+1))^2 \geq 100(b+1) = 100b+100 > 100b+c$. Mahdollisimman suuri x on siis jo tietämämme x_1. Luvun y puolestaan on täytettävä ehto $(10x_1 + y)^2 \leq 100b + c$ eli $20x_1y + y^2 \leq 100(b - x_1^2) + c$ eli

$$y(20x_1 + y) \leq 100(b - x_1^2) + c.$$

$20x_1$ on nollaan päättyvä kokonaisluku. Tehtäväksi jää etsiä sille uusi viimeinen numero y niin, että tulo $y(20x_1 + y)$ jää pienemmäksi kuin tunnettu luku $100(b-x_1^2)+c$. Kun se on löydetty, niin luvun $\sqrt{100b + c}$ kokonaisosa on $10x_1 + y$. Luvun $100b + c$ ja sen neliöjuuren kokonaisosan neliön erotus on $100b+c-(10x_1+y)^2 = 100(b - x_1^2) + c - y(20x_1 + y)$. Tämä luku syntyy kymmenjärjestelmässä jo tunnetusta luvusta $b-x_1^2$ niin, että lausekkeen $b - x_1^2$ perään kirjoitetaan c:n numerot ja tästä luvusta vähennetään juuri määritetty $y(20x_1 + y)$. Nyt olemme tilanteessa, jossa voimme jatkaa, esimerkiksi luvun $10000b + 100c + d$ neliöjuuren kokonaisosaan.

Katsotaan asiaa lukuesimerkin avulla. Lasketaan luvun $\sqrt{123456}$ kokonaisosa. Nyt $b = 12$, $c = 34$ ja $d = 56$. Aikaisemman perusteella 35 on luvun $\sqrt{1234}$ kokonaisosa. Siis $x = 3$ ja $y = 5$. Edelleen aikaisemman perusteella $100b + c - (10x + y)^2 = 1234 - 35^2 = 9$. Lisäksi $20x + 2y = 60 + 10 = 70$. Luvun z tulee olla suurin ehdon $z(10 \cdot 70 + z) < 10^2 \cdot 9 + d = 956$ eli $z(700 + z) < 956$ toteuttava kokonaisluku. Selvästi on oltava $z = 1$. Neliöjuuren $\sqrt{123456}$ kokonaisosa on siis 351.

Koska $\sqrt{10^{2n}a} = 10^n\sqrt{a}$ ja $\sqrt{10^{-2n}a} = 10^{-n}\sqrt{a}$, ei sillä, että edellä on puhuttu kokonaisluvuista, tai muotoa $100b + c$, $0 \leq c \leq 99$, olevista luvuista, ole merkitystä: desimaalipilkkua voidaan aina siirtää juurrettavassa $2n$ paikkaa, kun sitä samalla siirretään juuressa n paikkaa, samaan suuntaan kummassakin tapauksessa. Olennaista on, että kun juurrettavan kokonaisosassa on $2n - 1$ tai $2n$ numeroa, juuren kokonaisosassa on n numeroa. Juuren ensimmäiseen numeroon vaikuttavat vain juurrettavan suurin tai kaksi suurinta numeroa, sen mukaan, onko juurrettavan kokonaisosassa pariton vai parillinen määrä numeroita. Kun neliöjuurta on rakennettu k:n numeron verran, otetaan juurrettavasta tarkasteluun seuraavat kaksi numeroa oikealta (eli siirrytään luvusta b lukuun $100b + c$), ja menetellään, niin kuin edellä kuvattiin. Prosessia voi jatkaa mielivaltaisen pitkään. Neliöjuuret ovatkin yleensä jaksottomia päättymättömiä desimaalilukuja.

Neliöjuurenottoalgoritmin laskutemput voi järjestää hiukan samassa hengessä kuin jakokulmassa jakamisen. Eräs tapa, Kalle Väisälän Algebran oppi- ja esimerkkikirjan ensimmäisestä osasta lainattu, on esitetty laskukaaviossa 1. Siinä lasketaan luvun $\sqrt{123456}$ alalikiarvo kahden desimaalin tarkkuudella. Juurrettavasta tarvitaan silloin neljä desimaalia, joten kirjoitamme sen muotoon 123456,0000. Kun juurrettavan käsitellään ikään kuin kaksi numeroa kerrallaan, on mukava erottaa juurrettavan numerot pystyviivoin kahden ryhmiin. Yksi erotteluviiva on desimaalipilkun kohdalla.

```
1 2|3 4 |56,00|00|        351,36
−9                        +3
 3 3 4                     65
−3 2 5                     + 5
     9  56                 701
    −7  01                 +   1
     2  55 00              702 3
    −2  10 69              +     3
         44 31 00          702 66
       − 42 15 96          +       6
           2 15 04         702 72
```

Laskukaavio 1.

Algoritmin joka askeleen kohdalla on tarpeen tietää luku $20x_1$, missä x_1 on jo käsitellyn luvun osan neliöjuuren kokonaisosa. Kun etsitään neliöjuureen seuraavaa numeroa, edellä y:llä merkittyä, niin seuraava kaksinkertainen neliöjuuren kokonaisosan arvo, siis $2(10x_1 + y)$ saadaan lisäämällä $20x_1$:een $2y$. Kaaviossa tämä toteutetaan kirjoittamalla tunnetun $2x_1$:n perään y, jolloin saadaan $20x_1 + y$:n desimaaliesitys, ja laskemalla – allekkain – tämän luvun kanssa yhteen y. Toisaalta tarvitaan jo käsitellyn luvun osan ja sen neliöjuuren kokonaisosan erotus. Kuten edellä osoitettiin, se on $100(b-x_1^2)+c-y(20x_1+y)$. Kun $b-x_1^2$ on jo tunnettu, saadaan uusi erotus kymmenjärjestelmässä kirjoittamalla $(b - x_1^2)$:n numeroiden perään c:n numerot ja vähentämällä tästä luvusta kertolaskun $y(20x_1 + y)$ tulos.

Laskukaavion mukaan $\sqrt{123456} \approx 351{,}36$. Menettelyä voi jatkaa miten pitkään tahansa. Seuraavan desimaalin y ehto olisi $y(702720 + y) \leq 2150400$. Tästä saataisiin $y = 3$. Tarkastamalla kaavion numeroita edellä esitetyn selostuksen mukaisesti huomaa logiikan melko pian.

Lukija kokeilkoon määrittää desimaaleja lukuihin $\sqrt{2}$, $\sqrt{\pi}$ ja laskekoon puhelinnumeronsa neliöjuuren! Sitten voikin ryhtyä iteroimaan algoritmia. Ensimmäinen haaste olisi vaikkapa $\sqrt[4]{2}$.

Neliöjuuri binäärijärjestelmässä

Kun siirrytään lukujen esityksessä kymmenjärjestelmästä kaksijärjestelmään, kertotaulun yksinkertaisuus tekee algoritmistamme olennaisesti helpomman. Positiivinen kokonaisluku, jonka binääriesitys on enintään kaksinumeroinen, on enintään 11 eli kymmenjärjestelmän 3. Enintään kaksinumeroisen binääriluvun neliöjuuren kokonaisosan binääriesitys on siis aina 1. Jokainen positiivinen kokonaisluku a voidaan esittää muodossa $4b + c$, missä $0 \leq c \leq 3$. Tässä $4b$ on ainakin kahteen nollaan päättyvä binääriluku ja c on enintään kaksinumeroinen binääriluku. Jos tiedämme luvun $\sqrt{b}$ kokonaisosan x, niin luvun a neliöjuuren kokonaisosa on $2x + y$, missä $y = 0$ tai $y = 1$. Luku y määräytyy ehdosta $(2x + y)^2 \leq 4b + c$. Se sievenee muotoon $y(2x + y) \leq 4(b - x^2) + c$. Luvun y valinta on nyt helppo: jos $2x + 1 > 4(b - x^2) + c$, niin $y = 0$, jos $2x+1 \leq 4(b-x^2)+c$, $y = 1$. Kun luvusta $4(b-x^2)+c$ vähennetään $y(2x + y)$, jää $4b + c - 4x^2 - 2xy - y^2$ eli $4b + c - (2x + y)^2$. Tiedämme nyt aikaisemmasta kahdella binäärinumerolla pidennetyn kokonaisluvun neliöjuuren kokonaisosan binääriesityksen ja samalla luvun ja kokonaisosan neliön erotuksen. Tällä tavoin neliöjuuri saadaan rakennetuksi yksinkertaisesti bitti kerrallaan.

Havainnollistetaan asiaa laskemalla luvun $\sqrt{1234}$ kokonaisosan binääriesitys. Tätä varten tarvitsemme luvun 1234 binääriesityksen. Koska $1234 = 1024 + 210 = 1024 + 128 + 82 = 1024 + 128 + 64 + 18 = 1024 + 128 + 64 + 16 + 2$, esitys on 10011010010. Järjestetään laskukaaviossa 2 juuren kehittyminen samalla tavalla kuin kuin edellä kymmenjärjestelmää käytettäessä tehtiin. Jätetään yhteen- ja vähennyslaskujen merkit yksinkertaisuuden vuoksi pois. Lukija havaitsee, että vasemmanpuoleisen taulun toimitukset ovat vähennyksiä, oikeanpuoleisen lisäyksiä. Havainnollisuuden vuoksi ryhmitellään juurrettavan numerot jälleen pareihin pystyviivoin.

```
1|00|11|01|00|10      100011
1                     1
0 00                  100
   0                    0
   0 11               1000
      0                  0
      11 01           10000
          0               0
      11 01 00        100001
      10 00 01             1
        1 00 11 10    1000101
        1 00 01 01          1
             10 01    1000110
```

Laskukaavio 2.

Binäärilukujen neliöjuurialgoritmi on varsin yksinkertaisesti ohjelmoitavissa tietokoneelle. En tiedä, käytetäänkö algoritmia tällaisenaan. Se, että halvimmissakin nelilaskimissa on yleensä neliöjuuritoiminto panee uskomaan, että niin tapahtuu.

Autiolle saarelle itsensä kuvitteleva lukija voi seuraavaksi ryhtyä omin päin aikansa kuluksi selvittelemään neliöjuurialgoritmia muissa lukujärjestelmissä. Ja miten sujuisi kuutiojuuren ottaminen?