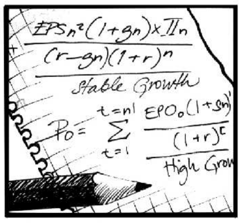


Normaalijakauman kertymäfunktiosta

Pekka Alestalo
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Normaalijakauma

Normaalijakauma on tärkein jatkuva jakauma ja sitä käsitellään myös lukion matematiikassa. Jos jakauman odotusarvo on μ ja keskihajonta σ, niin kertymäfunktion lauseke on

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}\,dt.$$

Käytännössä riittää tarkastella normitettua jakaumaa, jonka odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1. Normitetun normaalijakauman kertymäfunktio on siis

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Yksi luonnollinen kysymys jää kuitenkin kunnolla ratkaisematta, vaikka sen vastaus toki kirjoissa mainitaan: Mistä tulee kaavassa oleva kerroin? Tunnetusti kertymäfunktion ominaisuuksiin kuuluu ehto

$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x) = 1, \quad \text{eli} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = 1, \tag{1}$$

ja kerroin $1/\sqrt{2\pi}$ on tietysti valittu tämän vaatimuksen perusteella. Sen sijaan eksponentissa oleva kerroin $1/2$ tarvitaan, jotta keskihajonta olisi 1, mutta tämä jääköön lukijan tutkittavaksi. Vaikka kertymäfunktion $\Phi(x)$ lauseketta ei voida ilmaista alkeisfunktioiden avulla (todistus on pitkä ja hankala), on kuitenkin yllättäen mahdollista – ja vielä lukiokurssin pohjalta – osoittaa ehdon (1) toteutuminen.

Integraalin laskeminen

Yllä mainittu integraali voidaan laskea melko helposti seuraavan idean perusteella. Lasketaan erään kolmiulotteisen kappaleen tilavuus kahdella eri tavalla: ensiksi viipaloimalla kappale yhdensuuntaisilla tasoilla ja integroimalla näiden poikkileikkausten pinta-alaa, ja toisaalta käyttämällä pyörähdyskappaleen tilavuuden lauseketta (joka vastaa viipalointia eri suunnassa!). Koska tulosten täytyy olla samat, saamme yllättäen laskettua tutkittavana olevan integraalin.

Aloitetaan pienellä sievennyksellä, joka perustuu määrätyn integraalin muuttujanvaihtokaavaan. Tehdään muuttujanvaihto $t = \sqrt{2}\,u$, jolloin $dt = \sqrt{2}\,du$, ja tehtäväksi jää osoittaa, että

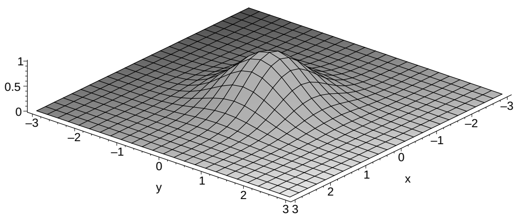
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}. \tag{2}$$

(Jos muuttujanvaihto ei ole lukijalle tuttu, hän voinee käydä alla olevat laskut läpi käyttämällä alkuperäistä muotoa.)

Kappale, jonka tilavuutta seuraavassa tutkitaan, sijaitsee xyz-avaruudessa pinnan $z = e^{-x^2-y^2}$ ja xy-tason välissä, eli se voidaan määritellä muodossa

$$\{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq e^{-x^2-y^2}, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}.$$

Kyseessä ei ole rajoitettu kappale, mikä liittyy siihen, että laskettava integraalikin on epäoleellinen, ts. integroimisrajoina ovat $\pm\infty$. Tilavuutta ja kyseistä integraalia pitäisi tämän vuoksi tarkastella sopivan rajaprosessin avulla, mutta sivuutan tämän pienen ongelman, jonka korjaaminen vaatii ainoastaan ”teknistä näpertelyä”.



Ensimmäinen tapa

Aloitetaan tilavuuden laskeminen viipaloimalla kappale pystysuorilla tasoilla $y = y_0, x, z \in \mathbf{R}$. Vastaava poikkileikkaus on yhtenevä xy-tason alueen

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}, 0 \leq y \leq e^{-x^2-y_0^2}\}$$

kanssa, joten poikkileikkauksen pinta-ala on muotoa

$$A(y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y_0^2}\, dx$$

(käytetään tavallista funktion kuvaajan rajoittaman pinta-alan kaavaa). Koska $e^{-x^2-y_0^2} = e^{-x^2}e^{-y_0^2}$ eikä lauseke $e^{-y_0^2}$ riipu integroimismuuttujasta x, saadaan edelleen

$$A(y_0) = e^{-y_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = e^{-y_0^2} I.$$

Kappaleen tilavuus saadaan integroimalla poikkileikkausten pinta-aloja muuttujan y_0 suunnassa, joten tuloksena on

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y_0^2} I\, dy_0 = I \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y_0^2}\, dy_0 = I^2,$$

sillä integroimismuuttujan nimellä ei ole väliä ja integraalin arvo I on pelkkä luku!

Toinen tapa

Seuraavaksi tilavuus lasketaan viipaloimalla kappale xy-tason suuntaisilla tasoilla. Poikkileikkaukset ovat ympyröitä, sillä arvoilla $0 < z < 1$ yhtälöstä $z = e^{-x^2-y^2}$ ratkeaa $x^2 + y^2 = -\ln z > 0$, joten voimme käyttää pyörähdyskappaleen tilavuuden lauseketta. Tarkasteltava kappale syntyy, kun xz-tason käyrä $z = e^{-x^2}$, $x \geq 0$, pyörähtää z-akselin ympäri. Käyrän yhtälöstä täytyy siis ensin ratkaista x muuttujan z avulla lausuttuna:

$$z = e^{-x^2} \iff \ln z = -x^2 \iff x = \sqrt{-\ln z};$$

huomaa, että $x \geq 0 \iff 0 < z \leq 1$, joten $\ln z \leq 0$. Pyörähdyskappaleen tilavuudeksi saadaan näin ollen

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{-\ln z})^2\, dz = -\pi \int_0^1 \ln z\, dz.$$

Tämäkin on epäoleellinen integraali, joten lasketaan vaihteeksi huolellisesti. Funktion $\ln z$ integraalifunktio on $z \ln z - z$, mikä voidaan tarkistaa derivoimalla. Jos $a > 0$, niin saadaan

$$\int_a^1 \ln z\, dz = 1 \cdot \ln 1 - 1 - (a \ln a - a) = -1 - a - a \ln a.$$

Kun $a \to 0+$, tulee raja-arvoksi -1, sillä $a \ln a \to 0$ (voidaan esim. sijoittaa $a = e^{-t}$, jolloin $a \to 0+ \iff t \to \infty$, ja tunnetusti $a \ln a = -te^{-t} \to 0$, kun $t \to \infty$).

Tilavuudeksi saadaan siis $V = \pi$, joten täytyy olla $I^2 = \pi$, ja kaava (2) seuraa.

Kolmas tapa

Vaikka peli on jo selvä, lasketaan kysytty tilavuus vielä kolmannella tavalla. Tämäkin menetelmä perustuu siihen, että kyseessä on pyörähdyskappale. Nyt kuitenkin ajatellaan kappaleen muodostuvan sellaisista sylintereistä, joiden akseli on z-akselilla, ja sylinterin säteen ollessa $r \geq 0$ on sen korkeus puolestaan e^{-r^2}. Sijoittamalla $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ nähdään, että näistä sylintereistä muodostuu sama kappale kuin aikaisemmissa kohdissa. Tällaisen r-säteisen sylinterin pinta-ala on

$$\text{piiri} \cdot \text{korkeus} = 2\pi r e^{-r^2},$$

ja kappaleen tilavuus saadaan tällä kertaa kokoamalla sylintereiden pinta-alat yhteen muuttujan r suhteen. Tuloksena on integraali

$$V = \pi \int_0^\infty 2re^{-r^2}\ dr.$$

Tarvittava integraalifunktio on yksinkertaisesti $-e^{-r^2}$, joten sijoituksesta saadaan uudelleen

$$V = \pi(-\lim_{R\to\infty} e^{-R^2} + e^0) = \pi.$$

Pohdiskelua

Ajatelkaamme laskun tulosta vielä uudelleen: saimme siis laskettua erään integraalin arvon, vaikka itse integraalifunktiosta ei ollut mitään tietoa. Lisäksi tulos oli suhteellisen yksinkertainen, eli $\sqrt{\pi}$. Vaikka asia voi tuntua hieman kummalliselta, useita epäoleellisia integraaleja voidaan laskea ilman tietoa integraalifunktiosta. Tällaisia esimerkkejä ovat mm.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad \int_0^\infty \sin(x^2)\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Jälkimmäinen integraali on siinä mielessä erityisen mielenkiintoinen, että integroitavalle funktiolle $\sin(x^2)$ **ei päde** $\lim_{x\to\infty} \sin(x^2) = 0$, mutta epäoleellinen integraali on kuitenkin suppeneva! En malta vielä lopuksi olla huomauttamatta, että kun tähän tehdään muuttujanvaihto $x = e^t$, saadaan suppeneva epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^\infty e^t \sin(e^{2t})\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

missä integroitava funktio heilahtelee hyvin voimakkaasti muuttujan t kasvaessa.