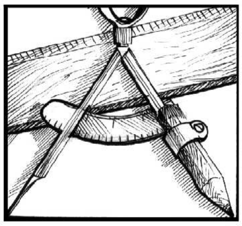


Toiminnallista matematiikkaa: Fraktaaliaskartelua

Saara Lehto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sarjassa Toiminnallista matematiikkaa esitellään Summamutikka-matematiikkakerhoissa hyviksi havaittuja tehtäviä. Sarjassa esitetään tehtävät ratkaisuineen, annetaan neuvoja tehtävien ohjaamiseen ja valotetaan niiden matemaattista taustaa. Summamutikkakerhoja järjestävät LUMA-keskus ja Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitos pääkaupunkiseudun ala-asteilla. Lisätietoja Summamutikkakerhoista löytyy sivuilta: `http://www.helsinki.fi/summamutikka`.

Vihreä mato asuu puunkolossa. Eräänä päivänä se päättää mitata kotioksansa pituuden. Se aloittaa oksan juurelta ja lähtee rohkeasti mittaamaan oksaa ylöspäin. Mitattuaan kaksitoista matomitallista se kuitenkin lyö päänsä johonkin kovaan.

Mato katsoo ylöspäin ja huomaa, että oksasta erkanee toinen oksa sen reitille. Se miettii hetken ja päättää sitten mitata myös pienemmän oksan pituuden. Uusi oksa ei ole juuri sen omaa ruumista paksumpi ja sen pitääkin tasapainoilla pysyäkseen reitillä. Se ehtii mitata vain neljä matomitallista, kun se jälleen huomaa jotain edessään.

Oksasta työntyy ulos jälleen uusi oksa, mutta tämä oksa on aivan pieni ja niin kapea, ettei mato enää mahdu sille mittaamaan. Mato arvioi, ettei oksan pituuskaan ole edes yhtä matomitallista. Kun mato tarkkailee oksaa, se huomaa liikettä oksan juurella. Pienenpieni ruskea mato kulkee oksalla. Se kääntyy tuolle pienemmälle oksalle ja lähtee mittaamaan sitä ylöspäin. Iso mato laskee, että se mittaa yksi, kaksi ja kolme omaa mittaansa.

Sitten iso mato joutuu oikein siristämään silmiään. Pienenpienen oksan varresta työntyy ulos aivan pikkiriikkinen oksa ja pieni ruskea mato jatkaa matkaansa sitä pitkin. Kun iso mato tutkii pientä oksaa tarkemmin, se huomaa, että se on täynnä noita vielä pienempiä oksia. Erästä toista sellaista mittailee toinen pieni ruskea mato.

Mato tuntee yhteenkuuluvuutta noiden pienten ruskeiden matojen kanssa. Nekin mittaavat kotioksiensa pituuksia. Se katselee kaikkia noita pieniä oksia. Miten ruskeat madot ikinä saavat ne kaikki mitatuiksi, se tuu-

mii. Äkkiä matoa alkaa huimata. Se siristää silmiään vieläkin sirkeämmälle ja painaa nenänsä aivan kiinni pienen oksan pintaan. Onko pienenpienen oksan pikkiriikkisillä oksillakin oksanhaaroja?

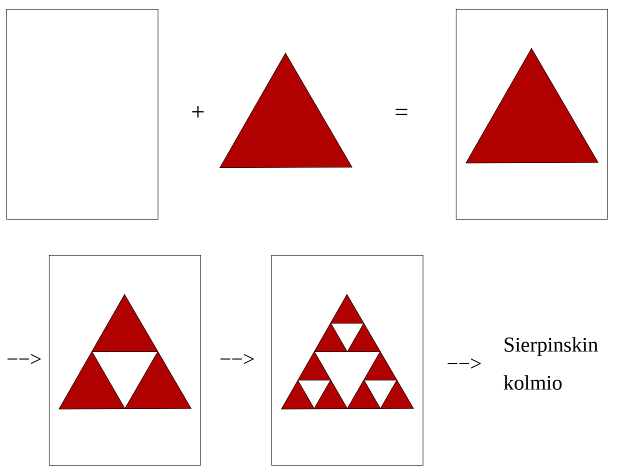
Se katselee ruskeita matoja, jotka mittaavat pieniä oksia, joita se itse ei mahdu mittaamaan. Katselevatko ruskeat madotkin toisia vielä pienempiä matoja, ehkäpä punaisia, jotka mittaavat oksia, joita ruskeat madot eivät enää voi mitata? Mato tuumii, kuinka kauan kaikkien niiden oksien mittaaminen kestäisi.

Mato katselee ympärilleen ja havaitsee, että myös sen oma oksa on täynnä pienempiä oksia. Sillä itselläänkin on siis edessään aika kova mittaaminen. Se kurkistaa oksansa juurelle ja siitä tuntuu, että jokin huimaava tunne pyörii sen vatsanpohjassa.

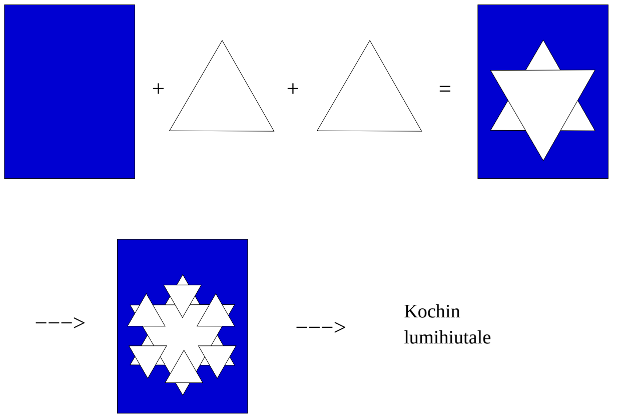
Tässä artikkelissa tutustutaan fraktaalikuvioihin. Tarinan mato asui fraktaalipuussa ja retkellään se törmäsi jo moneen fraktaalimaiseen huimaavaan ajatukseen. Seuraavaksi käsittelemme samankaltaisia ideoita ala-asteen ja miksei yläasteenkin oppilaille soveltuvalla tavalla.

Värillistä paperia, sakset ja liimaa

Aloitetaan askartelemalla kaksi kuuluisaa fraktaalia: Sierpinskin kolmio ja Kochin lumihiutale. Puuhaan tarvitaan valkoisia ja värillisiä A4-arkkeja, sakset ja liimaa. Askarteluohjeet on piirretty kuviin 1 ja 2.



KUVA 1. Leikkaa ja liimaa värillinen kolmio valkoiselle paperille. Leikkaa sitten lisää pienempiä valkoisia kolmioita ja liimaa kuten kuvassa. Kun kuviota jatketaan loputtomiin, saadaan Sierpinskin kolmio.



KUVA 2. Leikkaa ja liimaa värilliselle paperille kaksi valkoista kolmiota Daavidin tähdeksi. Leikkaa sitten lisää pienempiä valkoisia kolmioita ja liimaa kuten kuvassa. Kun kuviota jatketaan loputtomiin, saadaan Kochin lumihiutale.

Molemmat kuviot syntyvät erikokoisista tasasivuisista kolmioista. Kolmiot voi leikata vapaalla kädellä pyrkien kohti tasasivuista muotoa. Näin syntyy ihan mukavia kuvia. Jos aloituskolmiot eivät ole ihan tasasivuisia, kannattaa pienemmät kolmiot sovittaa kuvan avulla. Tärkeintä on, että fraktaalikuvio säilyy.

Kolmioita leikatessa voidaan pohtia sitä, miten täydellisen tasasivuisen kolmion helpoiten saisi aikaan. Aika hyviä kolmioita saa aikaan ihan kokeilemalla. Jos kantasivu on tietyn pituinen, halutaan kahdesta muusta sivusta vielä saman pituiset. Jos laittaa ensimmäisen sivun näin ja toisen noin, kuinka pitkä kolmannesta sivusta tulee? Onko se oikean pituinen? Mihin eri asentoihin toisen sivun voi laittaa? Voisiko toista ja kolmatta sivua sovittaa jotenkin yhtä aikaa?[1]

Voidaan myös miettiä miten pienemmät kolmiot suhtautuvat isompiin? Miten niistä saa saman muotoisia ja mistä tietää, minkä kokoisia niiden pitää olla? Tässä kannattaa kiinnittää huomiota siihen, kuinka monta pienempää kolmiota isompaan mahtuu. Kun kuviota askarrellaan eteenpäin, millaisia uusia kolmioita kuvioon syntyy?

Sierpinskin kolmiota tehtäessä kannattaa katsoa, miten värillinen kolmio jakautuu, kun sen päälle liimataan valkoinen kolmio. Minkä muotoisia jäljelle jäävät värilliset osat ovat? Miten isosta kolmiosta saisi monta oikean kokoista pienempää kolmiota?

Kochin lumihiutaletta askarrellessa syntyy hiutaleen reunalle aina uusia pieniä kolmioita. Minkä kokoisia kolmioita niiden päälle liimataan? Kuinka monta sellaista mahtuu isompaan kolmioon?

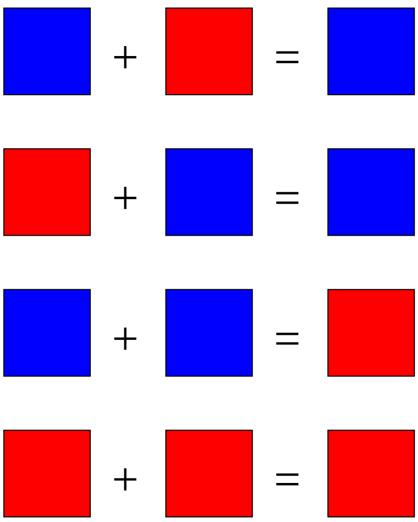
[1] Tasasivuinen kolmio syntyy kätevästi harpin avulla. Piirretään ensin kolmion kantasivu, otetaan sivun pituus harpille ja piirretään ympyränkaaret sivun yläpuolelle kun harpin kärki on vuorollaan sivun molemmissa päissä. Kolmion kolmas kärki on kaarien leikkauspisteessä.

Kuvioiden askartelua voisi periaatteessa jatkaa loputtomiin. Sierpinskin kolmiossa syntyy aina uusia värillisiä kolmioita, joiden päälle voi liimata valkoisia kolmioita. Kochin lumihiutaleessa voi taas reunalle syntyvien kolmioiden päälle aina liimata uusia pieniä kolmioita.

Värien yhteenlasku ja Sierpinskin kolmio

Tässä tehtävässä lasketaan lukujen sijaan väreillä. Valitaan tarkasteluun kaksi väriä, vaikkapa sininen (tummempi) ja punainen (vaaleampi). Aloitetaan määrittelemällä värien laskusäännöt kuten kuvassa 3.

Väreillä lasketaan ruutupaperille. Väritetään yhteenlaskettavat ruutuihin niin, että niiden väliin jää yksi tyhjä ruutu. Laskun tulos kirjataan sitten viistosti alapuolelle niiden väliin.

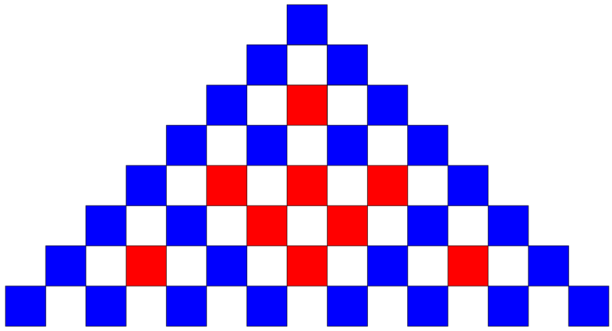


Kuva 3. Värien laskusäännöt. [2]

Aloitetaan kuvion laskeminen värittämällä ruutupaperin yläreunan keskelle sininen ruutu. Koska kuviosta tulee leveä, voi olla hyvä kääntää ruutupaperi vaakatasoon. Sinisen ruudun alapuolelle väritetään toiset siniset ruudut viistosti alavasemmalle ja alaoikealle. Nyt edessä on ensimmäinen laskutoimitus, tarkistetaan säännöistä, että sininen + sininen = punainen ja merkitään tulos sinisten ruutujen alapuolelle. Reunoille tulee taas siniset ruudut.

Jatketaan kuviota laskemalla laskusääntöjen mukaan. Reunoille väritetään aina siniset ruudut. Tämä voidaan ottaa joko annettuna sääntönä tai sitten voidaan ajatella, että siniset ruudut syntyvät, kun lasketaan ylhäällä vasemmalla tai oikealla oleva sininen ruutu ja toisella puolella oleva tyhjä ruutu yhteen.

Kuvassa on laskettu kolmion kahdeksan ensimmäistä riviä. Onko kuviossa jotain samaa kuin aiemmin askarrelluissa fraktaleissa? Silmien siristäminen tai kauempaa katsominen voi auttaa kuvion hahmottamisessa.



Kuva 4. Kuvan 3 laskusäännöillä lasketun kolmion kahdeksan ensimmäistä riviä.

Jos kuviota jatkettaisiin, yhdeksänteen riviin tulisi taas siniset ruudut reunoille ja keskelle seitsemän punaista ruutua. Tämän jälkeen punaisista ruuduista muodostuisi iso kärjellään seisova kolmio ja sen reunoille alkuosan mukaiset kuviot. Kolmiosta saadaan siis Sierpinskin kolmio.

Kuvion värittäminen vaatii periaatteessa tarkkaavaisuutta, sillä yksikin virhe saattaa muuttaa kuvion kokonaan. Toisaalta kuvion tietty säännönmukaisuus paljastuu käytännössä pienistä virheistä huolimatta. Pienet virheet saattavat itse asiassa tehdä kuvista mielenkiintoisia.

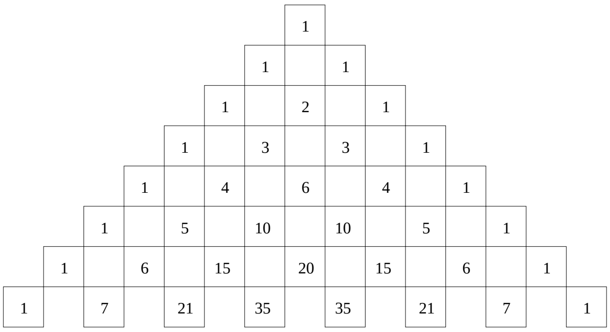
Kolmioita voi olla helpompaa värittää valmiiseen kolmiopohjaan, jossa ovat vapaina vain käytettävät ruudut. Tällaisen voi tehdä esimerkiksi värittämällä väliruudut mustaksi ruutupaperilta ja kopioimalla valmiita kolmioita. Tällöin rivejä kannattaa varata joko kahdeksan tai kuusitoista.

Koko luokan värittämät pienet kolmiot voi koota luokan seinälle isoksi Sierpinskin kolmioksi. Tällöin pieniä kolmioita kiinnitetään seinälle värien yhteenlaskun mukaisesti. Sinisten ruutujen kohdille kiinnitetään pieni kolmio. Punaisten ruutujen kohdat jätetään tyhjiksi. Kuviosta tulee hauska, vaikka eri kolmiot olisi väritetty eri väripareilla.

Värien yhteenlasku ja Pascalin kolmio

Kun värien yhteenlasku on hallussa, voidaan koettaa mitä tavallisella yhteenlaskulla saadaan aikaan. Kirjoitetaan ensimmäiseen ruutuun ja reunoille aina luku yksi ja alapuolelle lasketaan yllä olevat luvut yhteen. Näin saadaan Pascalin kolmio, kuva 5.

[2] Värit erottuvat paremmin verkkolehdessä.



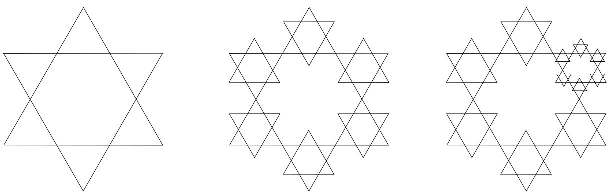
Kuva 5. Pascalin kolmion kahdeksan ensimmäistä riviä. Väritä kaikki parittomat luvut.

Kun Pascalin kolmiota on jaksettu laskea ruutupaperille kahdeksan tai kuusitoistakin riviä, väritetään kuviosta kaikki parilliset (tai parittomat) ruudut. Yllä olevasta kolmiosta katsomalla voi jo arvata, että tästäkin kuviosta tulee Sierpinskin kolmio.

Miksi Pascalin kolmion parilliset luvut tuottavat saman kuvion kuin väreillä laskettaessa? Mitä samaa on värien yhteenlaskussa ja parillisten ja parittomien lukujen yhteenlaskussa?

Lumihiutaleita ikkunalle

Kochin lumihiutaleita voidaan toki myös piirtää. Askartelussa näkyi vain kuvion reuna, mutta piirtämällä nähdään kuvion kulku myös tähden sisäpuolella. Piirretään kuten kuvassa 6. Kannattaa aloittaa valmiiksi monistetusta Daavidin tähdestä, silloin kuvio pysyy helpommin pidempään kasassa. Perusideana on, että kuvaan syntyneiden kolmioiden päälle piirretään aina uusia kolmioita.



Kuva 6.Kochin lumihiutaleen piirtäminen.

Kun käsi väsyy kolmioiden piirtämiseen, voidaan kuviota tutkia tarkemmin. Kuinka monta kolmiota kuvassa on? Kuinka monta pienimmän kolmion kokoista kolmiota kuvassa on?

Jos sisua riittää, valmiit kolmiot voidaan myös leikata reunojaan myöten irti paperista ja kiinnittää vaikka ikkunaan. Kuinka pitkä matka joudutaan leikkaamaan? Kuinka pitkä matka jouduttaisiin leikkaamaan, jos pienempiä kolmioita olisi piirretty vieläkin enemmän?

Lopuksi loputtomuuksia

Sekä Kochin lumihiutale että Sierpinskin kolmio ovat itsesimilaareja fraktaaleja. Itsesimilaarisuudella tarkoitetaan sitä, että kuvion osa näyttää samanlaiselta kuin koko kuvio. Jos kuvitellaan, että Kochin lumihiutaletta oltaisiin piirretty äärettömyyksiin ja katsotaan sen yhtä sakaraa, havaitaan, että se on samanmuotoinen kuin koko hiutale. Samoin Sierpinskin kolmiossa kaikki pienet kolmiot ovat samanmuotoisia kuin iso kolmio.

Kun askartelut, laskut tai piirrokset ovat valmiita, voidaan yhdessä pohtia kuvioiden geometriaa. Kuinka pitkälle piirtämistä voitaisiin jatkaa? Millaisilta kuviot näyttäsivät suurennuslasin läpi? Kuinka pitkälle värien yhteenlaskua voitaisiin jatkaa, jos ruutupaperia vain riittäisi? Miltä iso kuvio näyttäisi lentokoneesta?

Entä kuinka pitkä on piirretyn Kochin lumihiutaleen reuna? Kuinka pitkä se olisi, jos pienempiä kolmioita olisi piirretty vielä enemmän? Kuinka pitkä olisi äärettömyyksiin jatketun kuvion reuna? Kochin lumihiutaleen reuna on itse asiassa äärettömän pitkä. Äärettömän pitkä viivakin saadaan siis mahtumaan ihan tavalliselle paperiarkille.

Eräs fraktaalien jännittävä ominaisuus on se, että niiden dimensio ei ole välttämättä kokonaisluku. Esimerkiksi Kochin lumihiutaleen reunan dimensio on noin 1,261. Tätä voi ajatella esimerkiksi niin, että reuna on niin ryppyinen, ettei se ole enää viiva, mutta ei kuitenkaan ihan tasokappalekaan.

Pohdintojen apuna kannattaa käyttää omia fraktaaliaskarteluja ja tietokoneella piirrettyä kuvaa fraktaaleista esimerkiksi piirtoheittimellä. Hienoja kuvia näiden tehtävien fraktaaleista löytyy verkosta hakusanoilla: Sierpinski triangle tai Sierpinsky triangle ja Koch snowflake.

Madon perspektiivi

Palataan vielä hetkeksi alussa kerrottuun madon tarinaan. Mato huomasi, että sen puussa on jotain itsesimilaarista: sen oma oksa muistutti pienempää oksaa. Mato myös melkein huomasi, että sen oma oksa saattoi hyvinkin muistuttaa jotain isompaa oksaa tai peräti koko puuta. Onko tuollaisia fraktaalipuita sitten oikeasti olemassa?

Fraktaalimuotoja löytyy itse asiassa luonnosta paljon. Vehreään aikaan kannatta etsiä ulkoa saniaisia ja talvella voi vaikka käydä kukkakaupassa ja pyytää muutaman leikkovihreän. Hyvän fraktaaliesimerkin saa nahkalehdestä. Ruokakaupasta taas voi hakea tarkasteluun kukkakaalin.

Fraktaalien avulla voidaan laatia hienoja kuvia saniaisista, lehdistä ja vaikkapa vuorijonoista. Niistä kuulemme ehkä tarkemmin jossain toisessa kirjoituksessa.