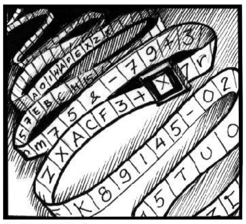

Calkinin-Wilfin jono

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Funktio $f : X \to Y$ on *bijektio*, jos sillä on käänteisfunktio $f^{-1} : Y \to X$. Joukko X on *äärellinen*, jos se on tyhjä tai jos on olemassa bijektio

$$f : X \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Joukko X on *numeroituva*, jos se on äärellinen tai jos on olemassa bijektio $f : X \to \mathbb{Z}_+$. Numeroituvuutta käsitellään esimerkiksi kirjassa [2].

Numeroituvan joukon alkiot voidaan siis numeroida antamalla jokaiselle joukon alkiolle x numero $f(x)$, missä f on mainittu bijektio. Käytännössä tämä merkitsee sitä, että numeroituvan joukon alkiot voidaan asettaa jonoon järjestyksessä $x_1, x_2, x_3 \ \ldots$. Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on numeroituva, sillä $\mathbb{N} \ni n \mapsto n+1 \in \mathbb{Z}_+$ on vaadittu bijektio. Myös kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ on helppo osoittaa numeroituvaksi, mutta on ehkä yllättävää, että rationaalilukujen joukkokin on numeroituva. Tyydymme tässä osoittamaan, että positiiviset rationaaliluvut voidaan asettaa jonoon. Todistus perustuu kaavioon

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1/1 & \to & 2/1 & & 3/1 & \to & 4/1 & & 5/1 & \to & 6/1 & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
1/2 & & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 & & 5/2 & & 6/2 & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
1/3 & & 2/3 & & 3/3 & & 4/3 & & 5/3 & & 6/3 & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
1/4 & & 2/4 & & 3/4 & & 4/4 & & 5/4 & & 6/4 & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & \\
1/5 & & 2/5 & & 3/5 & & 4/5 & & 5/5 & & 6/5 & \ldots \\
 & \swarrow & & & & & & & & & & \\
1/6 & & 2/6 & & 3/6 & & 4/6 & & 5/6 & & 6/6 & \ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}$$

josta nuolia seuraamalla saamme jonon

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ 3,\ 4,\ \frac{3}{2},\ \ldots\ .$$

Jokainen positiivinen rationaaliluku esiintyy tässä jonossa äärettömän monta kertaa. Jättämällä alusta lähtien pois jokaisen jonossa jo esiintyneen luvun saamme uuden jonon

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 3,\ 4,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ 5,\ \ldots\ ,$$

jossa jokainen positiivinen rationaaliluku esiintyy täsmälleen kerran.

Edellä esitetty herättää kysymyksen, onko mahdollista muodostaa kaikki positiiviset rationaaliluvut käsittävä jono turvautumatta mihinkään jälkikäteismanipulaatioihin. Tämä ongelma voidaan ratkaista monella eri tavalla, mutta ehkä elegantein ratkaisu on Calkinin ja Wilfin [3] konstruoima *binäärinen puu*, joka löytyy myös kirjasta [1].

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & & & \frac{1}{1} \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\ & \frac{1}{2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \frac{2}{1} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{1}{3} \arrow[d] & & \frac{3}{2} \arrow[d] & & \frac{2}{3} \arrow[d] & & \frac{3}{1} \arrow[d] \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \end{tikzcd}$$

Puu rakentuu kuvion osoittamalla tavalla siten, että jokaisella siinä olevalla luvulla on alla olevassa kaaviossa määritellyt vasemman- ja oikeanpuoleinen jälkeläinen, *vj* ja *oj*.

$$\begin{tikzcd} & \frac{p}{q} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{p}{p+q} & & \frac{p+q}{q} \end{tikzcd}$$

tai jos $\frac{p}{q} = x$, niin

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{x}{1+x} & & x+1. \end{tikzcd}$$

Lukemalla puuta vaakariveittäin vasemmalta oikealle saamme *Calkinin-Wilfin jonon*

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \ldots\ ,$$

jossa jokainen positiivinen rationaaliluku esiintyy täsmälleen kerran. Todistamme tämän väitteen. Todistus koostuu kolmesta erillisestä induktioperiaatteen sovelluksesta. Induktioperiaatetta käsitellään esimerkiksi kirjassa [2].

Lause 1. Calkinin-Wilfin jonon jokainen luku on supistetussa muodossa.

Todistus. Jonon ensimmäinen luku toteuttaa vaaditun ehdon. Jos $x = p/q$ on jonossa ja $\mathrm{syt}(p,q) = 1$, niin $\mathrm{syt}(p, p+q) = \mathrm{syt}(p+q, q) = 1$, joten myös x:n jälkeläiset ovat supistetussa muodossa. Induktioperiaatteen mukaan jonon kaikki luvut ovat supistetussa muodossa.

Lause 2. Calkinin-Wilfin jono sisältää kaikki positiiviset rationaaliluvut.

Todistus. Jonossa ovat kaikki rationaaliluvut p/q, joille $\mathrm{syt}(p,q) = 1$ ja
$p + q = 2$, nimittäin luku $1/1$. Olkoon $k \geq 3$ kokonaisluku. Teemme induktio-oletuksen, jonka mukaan jonossa ovat kaikki positiiviset rationaaliluvut s/r, joille $\mathrm{syt}(s,r) = 1$ ja $s + r < k$. Olkoon nyt p/q sellainen positiivinen rationaaliluku, että $\mathrm{syt}(p,q) = 1$ ja $p+q = k$. Jos $p < q$, niin $\frac{p}{q-p}$ on induktio-oletuksen mukaan jonossa, sillä $\mathrm{syt}(p, q-p) = 1$ ja $p+q-p = q < k$. Täten p/q on $\frac{p}{q-p}$:n *vj*:nä jonossa. Samalla tavalla näemme, että jos $p > q$, niin p/q on jonoon kuuluvan luvun $\frac{p-q}{q}$ *oj* ja on täten jonossa. Induktioaskel on näin todistettu ja induktioperiaatteesta seuraa, että jonossa ovat kaikki positiiviset rationaaliluvut p/q, joille $\mathrm{syt}(p,q) = 1$ ja $p + q = k$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$. Tämä kattaa kaikki positiiviset rationaaliluvut.

Lause 3. Calkinin-Wilfin jonossa ei ole kahta samaa lukua.

Todistus. Luku 1 esiintyy jonossa vain kerran. Jokainen muu jonon luku on joko *vj* (< 1) tai *oj* (> 1), joten riittää, että todistetaan kaikki *vj*:t ja vastavasti kaikki *oj*:t keskenään erisuuriksi. Jonon 7 ensimmäistä lukua ovat keskenään erisuuria ja niissä osoittajan ja nimittäjän summa on ≤ 5. Olkoon $k \geq 5$ kokonaisluku. Teemme induktio-oletuksen, jonka mukaan jonon kaikki luvut p/q, joille $p + q < k$, ovat keskenään erisuuria. Olkoot m/n ja r/s kaksi jonossa olevaa ehdot $m + n = k$ ja $r + s = k$ toteuttavaa *vj*:tä. Luvut

$$x = \frac{m}{n-m} \qquad \text{ja} \qquad y = \frac{r}{s-r}$$

ovat jonossa ja induktio-oletuksen mukaan erisuuret, sillä

$$\mathrm{syt}(m, n-m) = \mathrm{syt}(m,n) = 1 \quad \text{ja}$$

$$\mathrm{syt}(r, s-r) = \mathrm{syt}(r,s) = 1$$

sekä $m+n-m = n < k$ ja $r+s-r = s < k$. Ehdosta $x \neq y$ eli

$$\frac{m}{n-m} \neq \frac{r}{s-r}$$

seuraa välittömästi, että m/n ja r/s ovat erisuuret. Samalla tavalla todistetaan, että kaikki *oj*:t, joiden osoittajan ja nimittäjän summa on k, ovat keskenään erisuuria. Jätämme lukijan pohdittavaksi, miksi samanpuoleiset jälkeläiset a/b ja c/d ovat erisuuret, jos $a+b \neq c+d$. Jos siis kaikki jonon luvut p/q, joille $p+q<k$, ovat keskenään erisuuria, niin myös kaikki jonon luvut u/v, joille $u+v \leq k$ ovat keskenään erisuuria kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$. Induktioaskel on näin todistettu ja induktioperiaatteen mukaan kaikki jonon luvut ovat erisuuria.

Johdamme lopuksi rekursiokaavan Calkinin-Wilfin jonon lukujen laskemiseksi. Siihen tarvitsemme jonon luvun x korkeamman kertaluvun jälkeläisiä, mitkä määrittelemme ensin.

Näimme edellä, että jos x on jonon termi, niin x:n *oj* on $x+1$. Luvun x *toisen kertaluvun oj* on x:n *oj*:n *oj* eli $(x+1)+1=x+2$. Näin jatkamalla saamme x:lle kertalukua k olevan *oj*:n; se on $x+k$. Koska x:n *vj* on $x/(1+x)$, on x:n toisen kertaluvun *vj* $x/(1+2x)$ ja yleisesti kertalukua k oleva x:n *vj* on $x/(1+kx)$. Sijoittamalla saatuihin kaavoihin $k=0$ saamme x:n nollannen kertaluvun jälkeläiset. Kumpikin niistä on luku x itse.

Puun rakenteesta havaitsemme, että ensimmäistä termiä 1 lukuunottamatta jonon mielivaltainen termi x on erään jonossa aikaisemmin esiintyneen termin y vasemmanpuoleisen jälkeläisen k:nnen kertaluvun *oj*, missä $k \in \mathbb{N}$. Jos x ei ole puun minkään vaakarivin oikeassa reunassa, niin x:n oikealla puolella oleva luku, luvun x seuraaja jonossa, on puolestaan jo mainitun termin y oikeanpuoleisen jälkeläisen k:nnen kertaluvun *vj*. Kuvio havainnollistaa asiaa.

$$
\begin{tikzcd}
& & y \arrow[dll] \arrow[dr] & \\
\frac{y}{1+y} \arrow[dr] & & & y+1 \arrow[dl] \\
& \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \\
& x=\frac{y}{1+y}+k & \frac{1+y}{1+k(1+y)} &
\end{tikzcd}
$$

Luvun $x=\dfrac{y}{1+y}+k$ seuraaja on siis $\dfrac{1+y}{1+k(1+y)}$.

Merkitsemme luvun x kokonaisosaa ja murto-osaa symboleilla $[x]$ ja $\{x\}$. Koska $x=k+\frac{y}{1+y}$, on $[x]=k$ ja $\{x\}=\frac{y}{1+y}$, joten saamme x:n seuraajan muotoon

$$
\begin{aligned}
\frac{1+y}{1+k(1+y)} &= \frac{1}{k+\frac{1}{1+y}} = \frac{1}{k+1-\frac{y}{1+y}} \\
&= \frac{1}{[x]+1-\{x\}}.
\end{aligned}
$$

Jätämme lukijan todennettavaksi, että johdettu kaava antaa x:n seuraajan myös silloin, kun x on puun oikeassa reunassa.

Seuraajakaavan avulla saamme määriteltyä Calkinin-Wilfin jonon (x_n) rekursiivisesti:

$$
x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_{n+1} = \frac{1}{[x_n]+1-\{x_n\}}
$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Kiitän professori Jorma Merikoskea kirjoitustani koskeneista arvokkaista huomautuksista.

Kirjallisuutta

1. M. Aigner, G. Ziegler, Proofs from THE BOOK, Third edition, Springer 2004.

2. J. Merikoski, A. Virtanen, P. Koivisto, Johdatus diskreettiin matematiikkaan, WSOY 2004.

3. N. Calkin ja H. Wilf, Recounting the rationals. Amer. Math. Monthly 107 (2000), 360-363.

4. The On-Line Encyklopedia of Integer Sequences, http://www.research.att.com/∼ njas/sequences/