Solmu

Matematiikkalehti
2/2005

http://solmu.math.helsinki.fi

Solmu 2/2005

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)
ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi

Päätoimittaja
Pekka Alestalo, dosentti; Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Toimitussihteerit
Mika Koskenoja, tohtoriassistentti; Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Antti Rasila, tutkija; Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti *toimitus@solmu.math.helsinki.fi*

Toimituskunta:
Heikki Apiola, dosentti; Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu
Ari Koistinen, FM; Helsingin ammattikorkeakoulu Stadia
Matti Lehtinen, dosentti; Maanpuolustuskorkeakoulu
Marjatta Näätänen, dosentti; Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Tommi Sottinen, yliopistonlehtori; Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Graafinen avustaja *Marjaana Beddard*

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:
Virpi Kauko, tutkija, virpik@maths.jyu.fi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto
Jorma K. Mattila, professori, jorma.mattila@lut.fi
Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto
Jorma Merikoski, professori, jorma.merikoski@uta.fi
Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, Tampereen yliopisto
Kalle Ranto, assistentti, kalle.ranto@utu.fi
Matematiikan laitos, Turun yliopisto
Tiina Rintala, opiskelija, tirintal@paju.oulu.fi
Oulun yliopisto
Timo Tossavainen, lehtori, timo.tossavainen@joensuu.fi
Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, Joensuun yliopisto

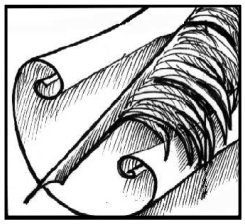
Numeroon 3/2005 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään syyskuun 2005 loppuun mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys

Pääkirjoitus: Kesälukemista (Pekka Alestalo) 4
Toimitussihteerin palsta: 30 Solmua ja yli 250 artikkelia (Mika Koskenoja) 5
Neljän alkion kunta, solitaire-peli ja taikaneliöt (Kalle Ranto ja Petri Rosendahl) 6
Toiminnallista matematiikkaa: Rosvo ja poliisi -peli (Meeri Viljanen) 11
Täydellisistä luvuista (Markku Halmetoja) 14
Tuomaksen tehtäviä (Tuomas Korppi) 17
Verrannollisuudesta pintaa syvemmältä (Teuvo Laurinolli) 19
Jaksollisista funktioista (Jukka Liukkonen) 22
Solmun tehtäviä 28
Numeerista lineaarialgebraa Python-kielellä (Antti Rasila) 30
Tehtäviä alakoululaisille 1950-luvulta 34



Kesälukemista

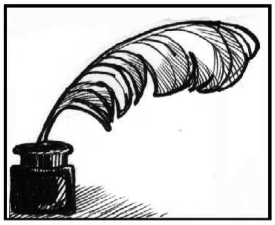
Lukuvuosi on jälleen päättymässä, ja se tarjoaa monille oppilaille ja opettajille hieman hengähdysaikaa tiiviin koulunkäynnin, opiskelun ja opettamisen päätteeksi. Joillakin on edessään kesätyö, toisilla kesämökki, lomamatka tai pelkästään rentouttava joutilaisuus.

Matematiikka ei ehkä ole niitä kaikkein suosituimpia kesäharrastuksia, mutta siihenkin on mahdollisuuksia. Koulukirjojen lukemista harkitsevat ainoastaan kaikkein vannoutuneimmat friikit, mutta kannattaa muistaa, että myös kauno- ja tietokirjallisuuden puolelta löytyy matematiikkaan liittyviä kirjoja. Pelkkä kirjan nimi ei aina paljasta sitä, että kirjassa puhutaan matematiikasta, mutta joka tapauksessa etsintä kannattaa aloittaa kirjastojen tai kirjakauppojen matematiikkahyllystä tai tieteen popularisoinnista tunnettujen kustantajien kotisivuilta. Myös tässä Solmun numerossa riittää lukemista ja tekemistä muutamaksi kesäpäiväksi.

Näissä ajatuksissa omiin käsiini sattui kaksi mainitsemisen arvoista kirjaa: *Robert Ossermanin* ”Kosmoksen runous” ja *H. W. Lewisin* ”Miksi heittää lanttia?”. Kummankaan kirjan nimi ei viittaa suoraan matematiikkaan, mutta sisältö taas sitäkin enemmän. Ensimmäisen teoksen aihepiiri liittyy geometriaan ja kirjoittaja onkin ns. minimipintojen tutkimisessa kunnostautunut matemaatikko. Mainittakoon myös, että Ossermanin tieteellinen oppi-isä (väitöskirjan ohjaaja) oli *Lars V. Ahlfors*, eräs tunnetuimmista suomalaisista matemaatikoista. Jälkimmäisen kirjan sankari on puolestaan todennäköisyyslaskenta, jonka avulla kirjoittaja pyrkii tarjoamaan perusteltuja vastauksia päätöksentekoa koskeviin ongelmiin. Tavoite ei ole aivan vaatimaton, kun puhutaan sellaisista kysymyksistä kuin ”Pitäisikö kosia/hyväksyä kosinta?”

Mutta jokainen valitkoon oman kesälomaohjelmansa. Lienee kuitenkin syytä varoittaa, etten ole lukenut kumpaakaan yllä mainituista kirjoista: aion tehdä sen vasta kesällä!

Pekka Alestalo



30 Solmua ja yli 250 artikkelia

Parhaillaan lukemasi numero 2/2005 on Solmun historian 30. lehti. Ensimmäinen Solmu 1/1996–1997 ilmestyi joulukuussa 1996; lehdet numeroitiin aluksi lukuvuosittain, kunnes vuoden 2001 alusta siirryttiin kalenterivuosiin. Kuluneiden yhdeksän vuoden aikana Solmussa on ilmestynyt hieman yli 250 artikkelia, joista viimeistään nyt suuri kiitos kaikille kirjoittajille!

Solmu on kouluille ja kaikille matematiikasta kiinnostuneille tarkoitettu verkkolehti, johon liitetään esimerkiksi opettajien täydennyskoulutusmateriaalia sekä kouluissa käytettäväksi tarkoitettua opetusmateriaalia. Solmun artikkelit ovat luettavissa verkkosivulla `http://solmu.math.helsinki.fi`, jossa myös kaikki muu materiaali sijaitsee ja on tulostettavissa. Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet.

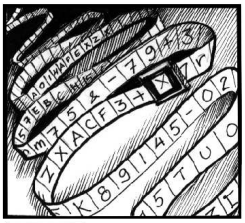
Solmun verkkosivuilla vierailut ovat jatkuvasti lisääntyneet. Vierailujen perusteella lehden numeroiden lisäksi suosituiksi materiaaleiksi ovat osoittautuneet mm. *Matti Lehtisen* kirjoittama Matematiikan historia, *Marjatta Näätäsen* kokoamat laajat unkarilaisvaikutteisen matematiikan opetuksen tiedostot sekä *Riitta Snellmanin* keräämät peruskoulun ja *Ossi Hyytin* keräämät lukion matematiikan opetuksen linkkikokoelmat. Lisää kirjoituksia toivotaan erityisesti peruskoulun yläluokkien tasolle näiden luokkien opettajilta.

Solmun toimituskunnassa ovat alusta alkaen olleet *Heikki Apiola*, *Matti Lehtinen* ja *Marjatta Näätänen*, samoin graafinen avustaja *Marjaana Beddard* on ollut mukana koko ajan. Solmun toiminnan käynnistäneessä toimituskunnassa olivat myös *Kerkko Luosto* päätoimittajana, *Jouni Seppänen* toimitussihteerinä ja *Kullervo Nieminen*. Sittemmin päätoimittajaksi on vaihtunut *Pekka Alestalo* ja toimitussihteereiksi ovat tulleet *Mika Koskenoja* ja *Antti Rasila*. Nykyisessä toimituskunnassa ovat myös *Ari Koistinen* ja *Tommi Sottinen*. Solmua avustavat yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt, joiden nimet ja yhteystiedot löytyvät painettujen Solmujen sivulta 2. Kansainvälistä yhteistyötä on erityisesti Englannin NRICH-projektin (`nrich.maths.org`) ja Unkarin KöMaL-matematiikkalehden (`www.komal.hu`) kanssa.

Lehden aloittamisen tekivät taloudellisella tuellaan mahdolliseksi Nokia ja Taloudellinen Tiedotustoimisto. Vuosina 1997–2001 Opetusministeriö avusti Solmua LUMA-rahoilla. Tällä hetkellä Solmua tukevat taloudellisesti Jenny ja Antti Wihurin rahasto sekä Suomen Kulttuurirahasto, joka on tukenut erityisiä projekteja, kuten EU-yhteistyönä tehtyä matematiikan verkkosanakirjaa. Solmun taustaorganisaatio on Suomen matemaattinen yhdistys, ja valtaosa toiminnasta tapahtuu Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella. Kiitos kaikille toimintaamme kuluneiden vuosien aikana tukeneille!

Mika Koskenoja

Toimitussihteerin palsta



Neljän alkion kunta, solitaire-peli ja taikaneliöt

Kalle Ranto* ja *Petri Rosendahl
Matematiikan laitos, Turun yliopisto

Nykyisissä tietoliikennesovelluksissa käytetään paljon tekniikoita, jotka perustuvat niin sanottujen *äärellisten kuntien* teoriaan. Esimerkiksi matkapuhelimissa käytettyjen virheitä korjaavien koodien, spektrinhajautuskoodien ja salausmenetelmien esittäminen ilman äärellisiä kuntia on käytännössä mahdotonta. Tässä kirjoituksessa esittelemme yksinkertaisen esimerkin äärellisestä kunnasta ja sovellamme sitä solitaire-pelin analysointiin ja taikaneliöiden konstruointiin.

Algebrallisen kunnan laskusäännöt

Karkeasti ottaen algebrallinen kunta on sellainen systeemi, jossa voidaan suorittaa yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja, ja jossa kaikki tavanomaiset laskulait ovat voimassa. Toisin sanoen kunnan alkioilla lasketaan samaan tapaan kuin reaaliluvuilla $\mathbb{R}$. Koska tämä ei ole riittävän tarkka määritelmä matemaatikolle, sanomme seuraavaksi saman asian hieman toisin.

Määritelmä 1. Joukko K varustettuna kahdella laskutoimituksella $+$ ja $\cdot$ on *kunta*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$ ja $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ aina kun $x, y, z \in K$,
2. $x+y = y+x$ ja $x\cdot y = y\cdot x$ aina kun $x, y \in K$,
3. joukossa K on sellainen alkio 0, että $x+0 = x$ aina kun $x \in K$,
4. jokaista $x \in K$ kohti on sellainen alkio $-x$, että $x+(-x) = 0$,
5. joukossa K on sellainen alkio 1, että $1\cdot x = x$ aina kun $x \in K$,
6. jokaista $x \in K$, $x \neq 0$, kohti on sellainen alkio x^{-1}, että $x\cdot x^{-1} = 1$,
7. $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$ aina kun $x, y, z \in K$.

Joukossa K oletetaan myös olevan vähintään kaksi alkiota.

Yllä mainittu alkio 0 on kunnan K nolla-alkio ja 1 on ykkösalkio.

Alkiota $-x$ sanotaan alkion x vasta-alkioksi ja sen avulla kunnassa määritellään vähennyslasku

$$x - y = x + (-y).$$

Alkiota x^{-1} sanotaan alkion x käänteisalkioksi ja se antaa jakolaskun

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1},$$

kun $y \neq 0$. Kunnassa voidaan myös alkio korottaa potenssiin

$$x^n = \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ kpl}}.$$

Esimerkki 1. Tavallisimpia esimerkkejä kunnista ovat rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$, reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ja kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$, kun näissä laskutoimitukset ovat tavalliset yhteen- ja kertolaskut. Sen sijaan kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ ei muodosta kuntaa yhteen- ja kertolaskun suhteen, sillä esimerkiksi alkiolla 2 ei ole käänteisalkiota joukossa $\mathbb{Z}$ (ks. Määritelmän 1 ehto 6).

Neljän alkion kunta

Hieman eksoottisempi esimerkki kunnasta on neljän alkion kunta $\mathbb{F}_4$, jota seuraavassa tarkastellaan lähemmin.

Olkoon $\mathbb{F}_4$ neljän alkion joukko $\{0, 1, \alpha, \beta\}$, jonka laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ määritellään Taulukon 1 mukaisesti. Silloin $\mathbb{F}_4$ toteuttaa Määritelmän 1 ehdot eli se on kunta. Selvästikin 0 on kunnan nolla-alkio ja 1 ykkösalkio. Voit halutessasi tarkistaa ehtojen toteutumisen muutamin esimerkein.

$+$	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

$\cdot$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Taulukko 1: Neljän alkion kunnan yhteen- ja kertolaskutaulut.

Tehtävä 1. Tarkista laskutauluja käyttäen seuraavat faktat:

(a) Heti nähdään, että $\beta = \alpha^2$ ja $\beta = \alpha + 1$.

(b) Kukin alkio on itsensä vasta-alkio, sillä $x + x = 0$ olipa $x \in \mathbb{F}_4$ mikä hyvänsä.

(c) Koska $\alpha\beta = 1$, alkion α käänteisalkio on β ja β:n käänteisalkio on α.

(d) Helposti todetaan, että $\alpha^n = 1$ jos ja vain jos n on jaollinen kolmella.

(e) Tauluista tai kohdista (a) ja (b) saadaan tärkeä relaatio $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

Kunta $\mathbb{F}_4$ tarjoaa yksinkertaisen esimerkin *äärellisestä kunnasta* (Esimerkin 1 kunnat olivat äärettömiä). Näiden teoria on nykyään vilkkaan tutkimuksen kohteena, ja onpa äärellisille kunnille omistettu oma aikakauslehtikin *Finite Fields and Their Applications*.

Esimerkki 2 ($\star$). (Tämän esimerkin ja ($\star$):llä merkityt tehtävät voi hypätä yli.) Voit lukea Tauno Metsänkylän Solmu-artikkelin [4] ja laskea luvuilla $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ modulo 5. Tämä tarkoittaa, että yhteen- ja kertolasku menee muuten normaalisti, mutta tuloksessa kiinnostaa ainoastaan jakojäännös 5:llä jaettaessa, jolloin lopputulos saadaan edelleen esitettyä luvuilla 0–4. Esimerkiksi

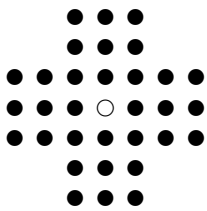
$$\begin{aligned} 1 + 4 = 5 &\equiv 0 \pmod 5, \\ 1 - 3 = -2 &\equiv 3 \pmod 5, \\ 4 \cdot 4 = 16 &\equiv 1 \pmod 5 \quad \text{ja} \\ \frac{3}{4} \equiv 3 \cdot 4 = 12 &\equiv 2 \pmod 5, \ \text{koska } 4^{-1} = 4. \end{aligned}$$

Tehtävä 2 ($\star$). Varmista itsellesi, että Esimerkin 2 joukko $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ on viiden alkion kunta, kun laskutoimitukset tehdään modulo 5.

Itse asiassa voidaan osoittaa, että edellisen esimerkin kaltainen joukko on kunta aina kun lasketaan modulo jokin alkuluku (esim. $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$). Lisäksi tiedetään, että on olemassa n:n alkion äärellinen kunta tarkalleen silloin, kun n on jokin alkuluvun potenssi (esim. 2^2 tai 3^5).

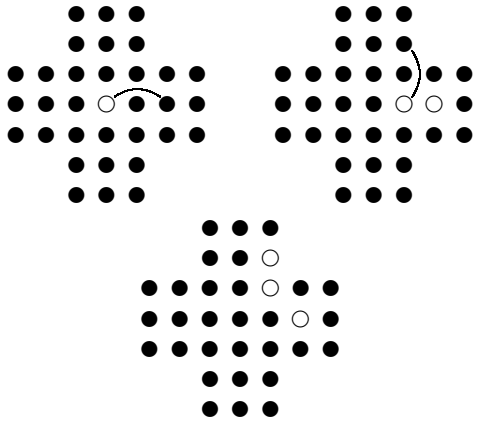
Solitaire-peli

Seuraavassa esitellään pari kombinatoriikan alaan laskettavaa äärellisten kuntien sovellusta. Useimmille tutun solitaire-pelin lauta ja alkutilanne näkyy Kuvassa 1.



Kuva 1: Englantilainen solitaire-lauta.

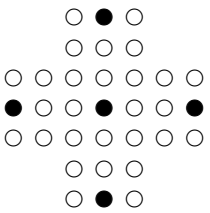
Pelin alkutilanteessa laudan jokaisessa reiässä keskimmäistä lukuunottamatta on nappula. Sallitussa siirrossa pelaaja hyppää nappulalla joko vaaka- tai pystysuoraan vieressä olevan nappulan yli sen takana olevaan tyhjään ruutuun, ja poistaa ylihypätyn nappulan (ks. Kuvan 2 siirtoja). Pelaajan tavoitteena on saada poistetuksi kaikki laudan nappulat yhtä lukuunottamatta.



Kuva 2: Esimerkki kahdesta ensimmäisestä siirrosta.

Kysymys. Mihin pelilaudan kohtaan viimeinen nappula voi jäädä?

Tämän kysymyksen selvittämiseen käytämme kunnan $\mathbb{F}_4$ aritmetiikkaa. Ajattelemme pelilaudan pisteet xy-koordinaatiston osajoukoksi niin, että laudan keskipiste on origossa, ja pisteiden koordinaatit ovat kokonaislukuja. Pelilaudan pisteille pätee siis $-3 \leq x \leq 3$ ja $-3 \leq y \leq 3$ (kuitenkaan esim. piste (2,2) ei ole englantilaisella laudalla).



Kuva 3: Mahdolliset paikat viimeiselle nappulalle.

Olkoon X niiden pelilaudan pisteiden joukko, joissa on nappula. Muodostetaan joukon X avulla kunnan $\mathbb{F}_4$ alkiot $A(X)$ ja $B(X)$ kaavoilla

$$A(X) = \sum_{(x,y)\in X} \alpha^{x+y} \quad \text{ja} \quad B(X) = \sum_{(x,y)\in X} \alpha^{x-y}.$$

Esimerkki 3. Olkoon $X = \{(1,0),(1,1),(1,2)\}$ kolmen allekkaisen pisteen joukko ja lasketaan

$$\begin{aligned} B(X) &= \alpha^{1-0} + \alpha^{1-1} + \alpha^{1-2} = \alpha^1 + \alpha^0 + \alpha^{-1} \\ &= \alpha + 1 + \alpha^2 = 0. \end{aligned}$$

Kannattaa huomata, että relaatiosta $\alpha^3 = 1$ seuraa esim. $\alpha^{-1} = \alpha^2$. ($\star$ Esimerkin 2 hengessä voidaan sanoa, että alkion α eksponenteilla lasketaan modulo 3.)

Samoin mille tahansa kolmen vierekkäisen (tai allekkaisen) nappulan joukolle X on voimassa $A(X) = 0 = B(X)$. Tästä saadaan seuraava tulos.

Tehtävä 3. Osoita, että alkutilanteessa $A(X) = 1$ ja $B(X) = 1$.

Esimerkki 4. Jos vaikkapa pisteessä (x, y) oleva nappula siirretään pisteessä $(x+1, y)$ olevan nappulan yli ja tässä siirrossa nappuloihin liittyvä joukko X muuttuu joukoksi Y, niin alkioiden erotus $A(Y) - A(X)$ on

$$\alpha^{x+2+y} - \alpha^{x+1+y} - \alpha^{x+y} = \alpha^{x+y}\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right) = 0.$$

Samoin todetaan muidenkin siirtojen jälkeiselle joukolle Y, että $A(Y) = A(X)$. Laskut on helppo suorittaa myös arvon $B(X)$ tapauksessa.

Tehtävä 4. Jos sallitussa siirrossa nappuloihin liittyvä joukko X muuttuu joukoksi Y, niin osoita, että $A(X) = A(Y)$ ja $B(X) = B(Y)$.

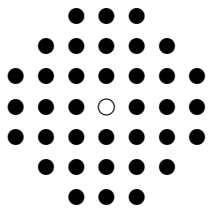
Oletamme nyt, että pelaaja on onnistunut pääsemään yhden nappulan lopputilanteeseen. Olkoon viimeisen nappulan koordinaatit (x, y). Tehtävien 3 ja 4 nojalla täytyy siis olla

$$\alpha^{x+y} = \alpha^{x-y} = 1.$$

Koska $\alpha^n = 1$ tarkalleen silloin, kun 3 jakaa luvun n, niin pienellä päättelyllä saadaan, että 3 jakaa molemmat luvut x ja y. Näin ollen viimeinen nappula voi olla vain jossakin ruuduista $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$, $(0,-3,)$ ja $(-3,0)$ (ks. Kuva 3).

Kokeilu osoittaa, että yhden nappulan lopputilanne on todella mahdollinen (ja ratkaisun löytää helposti www-sivuiltakin). Symmetrian nojalla voidaan myös sanoa, että jos jokin yo. lopputilanteista on mahdollinen, niin ne kaikki ovat (mieti tilannetta ennen viimeistä siirtoa).

Kuvassa 1 olevaa lautaa sanotaan englantilaiseksi laudaksi. Joskus näkee käytettävän myös ranskalaista pelilautaa, ks. Kuva 4.



Kuva 4: Ranskalainen solitaire-lauta.

Tehtävä 5. Osoita, että ranskalaisella solitairella ei ole ratkaisua, kun aloituksessa oleva tyhjä paikka on origossa (ts. tällöin ei päästä yhden nappulan lopputilanteeseen).

Solitairen ja kunnan $\mathbb{F}_4$ yhteys on esitetty alunperin artikkelissa [2]. Lisätietoa solitaire-pelistä löytyy esimerkiksi kirjasta [1] ja www-sivuilta, muunmuassa `www.geocities.com/gibell.geo/pegsolitaire/`

Latinalaiset neliöt

Edellisessä Solmussa [5] tehtiin 3×3 -taikaneliöitä. Esitämme nyt yleisen menetelmän, jolla äärellisistä kunnista saadaan taikaneliöitä. Konstruktiot löytyvät ainakin kirjasta [3].

Määritelmä 2. *Latinalainen neliö* on $n \times n$ -taulukko, jonka jokaisessa rivissä ja sarakkeessa kukin luvuista $0, \ldots, n-1$ esiintyy tasan kerran. Jos tämä ehto pitää paikkansa myös molemmille lävistäjille, sanotaan, että latinalainen neliö on *diagonaalinen*.

Voimme konstruoida 4×4 -latinalaisia neliöitä kunnan $\mathbb{F}_4$ avulla, kunhan sovimme alkioiden esittämisestä numeroilla $\{0, 1, 2, 3\}$. Se voidaan tehdä esimerkiksi seuraavasti (kunnan alkiot vasemmalla, numerot oikealla):

$$0 \leftrightarrow 0 \qquad 1 \leftrightarrow 1 \qquad \alpha \leftrightarrow 2 \qquad \beta \leftrightarrow 3 \tag{1}$$

Nyt jokaiselle kunnan $\mathbb{F}_4$ nollasta poikkeavalle alkiolle $x \neq 0$ määrittelemme neliön L_x, jonka i:nnen rivin ja j:nnen sarakkeen komponentti on

$$L_x(i, j) = i \cdot x + j. \tag{2}$$

Tässä laskut suoritetaan kunnassa $\mathbb{F}_4$ käyttäen vastaavuutta (1). Neliön rivien ja sarakkeiden numerointi aloitetaan nollasta eli $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Esimerkki 5. Lasketaan malliksi neliön L_1 komponentteja. Vasemman ylänurkan $(0, 0)$ koordinaatit vastaavat kunnan alkiota 0 ja laskusta $L_1(0, 0) = 0 \cdot 1 + 0 = 0$ saamme yläkulmaan numeron 0. Loput ylärivistä menee samaan tyyliin $L_1(0, j) = 0 \cdot 1 + j = j$, koska ykkösalkion kerroin on 0.

Lasketaan vielä malliksi neliön L_1 komponentit kohdissa $(1, 2)$ ja $(2, 3)$. Laskut menevät silloin $L_1(1, 2) = 1 \cdot 1 + \alpha = 1 + \alpha = \beta \leftrightarrow 3$ ja $L_1(2, 3) = \alpha \cdot 1 + \beta = \alpha + \beta = 1$. Loppujen komponenttien laskeminen jää harjoitustehtäväksi. Kaiken kaikkiaan saamme kolme latinalaista neliötä

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; L_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ ja}$$

$$L_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Huomaamme, että esimerkin neliöt ovat toistensa rivipermutaatioita eli saamme kaikki neliöt vaihtelemalla neliön L_1 rivejä sopivasti keskenään. Lisäksi kaikissa neliöissä ensimmäinen rivi on suuruusjärjestyksessä. L_1 on niin sanotussa standardimuodossa, jossa myös ensimmäinen sarake on suuruusjärjestyksessä, ja vieläpä symmetrinen. Toisaalta L_1 ei ole diagonaalinen, mutta L_α ja L_β ovat.

Tehtävä 6. Mieti, miksi kaavan (2) avulla saatavat neliöt ovat latinalaisia.

Määritelmä 3. Kahden $n \times n$ -latinalaisen neliön L ja L' sanotaan olevan *ortogonaaliset*, jos ottamalla molemmista neliöistä samat komponentit pareiksi $(L(i, j), L'(i, j))$ saadaan kaikki mahdolliset n^2 lukuparia $(0, 0), (0, 1), \ldots, (n, n)$.

Esimerkki 6. Tarkistetaan, ovatko edellisen esimerkin neliöt L_1 ja L_α ortogonaaliset. Voimme muodostaa kahdesta neliöstä yhdisteneliön, jonka komponentit ovat vastaavat komponenttien parit. Esimerkiksi

$$(L_1, L_\alpha) = \begin{bmatrix} (0,0) & (1,1) & (2,2) & (3,3) \\ (1,2) & (0,3) & (3,0) & (2,1) \\ (2,3) & (3,2) & (0,1) & (1,0) \\ (3,1) & (2,0) & (1,3) & (0,2) \end{bmatrix}.$$

Näemme, että kaikki parit esiintyvät tarkalleen kerran, joten L_1 ja L_α ovat ortogonaaliset.

Tehtävä 7. Tarkista samoin, että myös neliöt (L_1, L_β) ja (L_α, L_β) sisältävät kaikki mahdolliset parit.

Voidaan todistaa, että suurin määrä pareittain ortogonaalisia $n \times n$ -latinalaisia neliöitä on korkeintaan $n - 1$. Esimerkkimme antaa siis mahdollisimman suuren tällaisen joukon.

Tehtävä 8 ($\star$). Kaava (2) toimii kaikille äärellisille kunnille. Ota siis viiden alkion kunta $\mathbb{F}_5$ Esimerkistä 2, laske siihen liittyvät latinalaiset neliöt L_1, L_2, L_3 ja L_4 ja tarkista, että ne ovat keskenään ortogonaaliset. Näyttävätkö neliöt säännöllisemmiltä kuin neljän alkion kunnasta saadut?

Taikaneliöt

Määritelmä 4. *Taikaneliö* on $n \times n$ -taulukko, jossa kukin luvuista $1, 2, \ldots, n^2$ esiintyy tasan kerran ja jonka rivien, sarakkeiden ja lävistäjien summat ovat yhtäsuuret.

Voimme konstruoida $n \times n$ -taikaneliön kahdesta diagonaalisesta ja keskenään ortogonaalisesta $n \times n$-latinalaisesta neliöstä L ja L' seuraavasti: lasketaan taikaneliön $T_{L,L'}$ komponentit säännöllä

$$T_{L,L'}(i, j) = L(i, j) \cdot n + L'(i, j) + 1. \tag{3}$$

Tällä kertaa laskut suoritetaan normaalisti kokonaisluvuilla.

Esimerkki 7. Muodostetaan ortogonaalisten ja diagonaalisten neliöiden L_α ja L_β avulla 4×4 -taikaneliö. Kirjoitamme kaavan (3) taulukkomuodossa

$$T_{L_\alpha,L_\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot 4 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 1$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 12 & 15 & 2 & 5 \\ 14 & 9 & 8 & 3 \\ 7 & 4 & 13 & 10 \end{bmatrix},$$

missä kaikki laskut tehdään komponenteittain. Esimerkiksi vasempaan yläkulmaan tulee $0 \cdot 4 + 0 + 1 = 1$. Voit tarkistaa, että neliön T_{L_α,L_β} rivien, sarakkeiden ja lävistäjien summa todella on aina sama.

Tehtävä 9. Osoita, että $n \times n$ -taikaneliön rivien summa on aina $\frac{1}{2}n(n^2+1)$.

Tehtävä 10. Mieti, miksi kaavan (3) avulla saadaan taikaneliöitä. Yritä todistaa se. Mitä tapahtuu, jos latinalaiset neliöt eivät ole diagonaalisia? Onko T_{L_1,L_α} Määritelmän 4 mukainen taikaneliö?

Tehtävä 11 ($\star$). Muodosta 5×5 -taikaneliö käyttäen Tehtävän 8 latinalaisia neliöitä L_2 ja L_3 (vastaus alla). Miksei neliöitä L_1 ja L_4 voi käyttää?

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 13 & 19 & 25 \\ 14 & 20 & 21 & 2 & 8 \\ 22 & 3 & 9 & 15 & 16 \\ 10 & 11 & 17 & 23 & 4 \\ 18 & 24 & 5 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

Viitteet

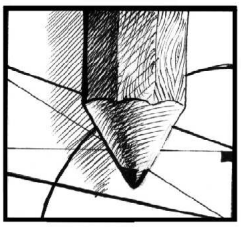
1. E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for your mathematical plays*, 2. nide, sivut 697–734, Academic Press, 1982.

2. N. de Bruijn: A solitaire game and its relation to a finite field, J. Recreational Math., 5, sivut 133–137, 1972.

3. C. J. Colbourn, J. H. Dinitz (eds.): The CRC Handbook of Combinatorial Designs, CRC Press, 1996.

4. T. Metsänkylä: Kongruenssi – lukuteorian kätevä apuväline, Solmu 3/1997–1998.

5. Taikasummat ja -tulot, Solmu 1/2005, `http://nrich.maths.org/` .



Toiminnallista matematiikkaa: Rosvo ja poliisi -peli

Meeri Viljanen
Tutkijakoulutettava
Helsingin yliopisto

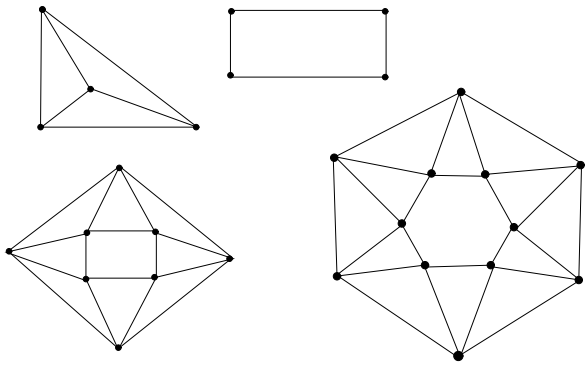
Sarjassa Toiminnallista matematiikkaa esitellään Summamutikka-matematiikkakerhoissa hyviksi havaittuja tehtäviä. Sarjassa esitetään tehtävät ratkaisuineen, annetaan neuvoja tehtävien ohjaamiseen ja valotetaan niiden matemaattista taustaa. Summamutikkakerhoja järjestävät LUMA-keskus ja Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitos pääkaupunkiseudun alaasteilla. Lisätietoja Summamutikkakerhoista löytyy sivuilta: `http://mathstat.helsinki.fi/luma`.

Rosvo yrittää paeta kaupungista toiseen ympäri valtakuntaa. Häntä jahtaa lauma poliiseja helikopterein pystyttäen tiesulkuja rosvon reitille. Poliisien helikopterit ovat ketteriä ja radiopuhelimet alati käytössä, mutta onnistuuko rosvon silti löytää uusia pakoreittejä? Pitäisikö poliisivoimien palkata apuvoimia tai tehdä helikopterihankintoja? Pienen valtion poliisivoimat eivät saa rosvoa kiinni suurvallassa. Kuinka paljon poliiseja tarvitaan kussakin valtiossa?

Pelilaudat

Pelilauta on yksinkertaistettu valtio, matemaattiselta nimeltään verkko. Valtiossa on kaupunkeja (solmuja) ja niitä yhdistäviä teitä (särmiä). Pelinappuloina ovat yksi rosvonappula ja pelistä riippuva määrä poliisinappuloita. Rosvo on aina sijoitettuna jonkun pelilaudan kaupungin päälle, kun taas poliisit ovat sijoitettuina teiden päälle.

Pelilaudan voi tehdä piirtämällä verkon A3-paperille. Käteviä pelinappuloita ovat post it -laput, mutta mitkä tahansa nappulat, vaikka kivet ja kävytkin, käyvät.



Kuva 1: Kuvia erilaisista pelilaudoista eli verkoista.

Pelin päämäärä

Poliisipelaaja yrittää saartaa rosvonappulan. Saarto on onnistunut, kun rosvon kaupunkia ympäröivien teiden päällä on kullakin yksi poliisi, eli rosvo ei pääse liikkumaan yhtään tietä pitkin ulos kaupungista. Tällöin poliisit voittavat.

Rosvo on voittanut, jos tarpeeksi kauan pelattuaan pelaajat yhdessä päättävät, että poliisit eivät voi saartaa rosvoa.

Peli I

Pelissä on yksi parametri, poliisien lukumäärä p. Pelinappuloina ovat yksi rosvonappula ja p kappaletta poliisinappuloita. Pelin aluksi rosvopelaaja asettaa rosvonappulansa pelilaudalle johonkin kaupunkiin. Tämän jälkeen poliisipelaaja asettaa yhden poliisinappulan valitsemansa tien päälle. Peli jatkuu niin, että rosvopelaaja saa vuorollaan siirtää rosvonappulan mihin tahansa sellaiseen kaupunkiin, johon pääsee vapaita teitä pitkin. Rosvon täytyy siis välttää poliisin tiesulkuja. Rosvo voi myös tahtoessaan pysyä paikallaan. Poliisipelaaja voi vuorollaan lisätä uuden poliisin minkä tahansa tien päälle, ja kun kaikki p poliisia ovat jo pelilaudalla, hän saa siirtää yhtä poliisia valitsemansa tien päälle. Poliisit liikkuvat helikopterilla, joten heidän ei tarvitse välittää tiesuluista.

Peli II

Pelissä on kaksi parametria, poliisien lukumäärä p ja helikopterien lukumäärä h. Pelinappuloina on edelleen yksi rosvonappula ja p kappaletta poliisinappuloita. Peliä pelataan kuten peliä I, mutta nyt poliisivoimilla on yhden helikopterin sijasta käytössä h helikopteria. Vuorollaan poliisipelaaja voi asettaa laudalle tai siirtää laudalla yhteensä h:ta poliisinappulaa.

Keskustelua

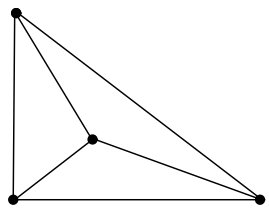
Peliä voidaan pelata ryhmissä niin, että puolet pelaajista pelaa rosvoa ja puolet poliisia. Välillä kannattaa vaihtaa osia. Ideana on kokeilla erilaisia pelilautoja ja erilaisia poliisien ja helikopterien määriä. Jos valtiossa on enemmän teitä, tarvitaan ehkä enemmän poliiseja rosvon saartamiseen. Jos valtiossa on yksikin kaupunki, jossa kohtaa neljä tietä, voiko kolmen poliisin voimin mitenkään saartaa fiksua rosvoa? Jos löydetään jokin riittävä määrä poliiseja rosvon saartamiseen, niin toki saarto onnistuu kaikilla tätä suuremmilla määrillä.

Oppilaiden on myös tarkoitus miettiä voittostrategioita sekä rosvolle että poliisille. Jos kustakin kaupungista lähtee neljä tietä, ja poliiseilla on käytössään kolme helikopteria, olisiko mahdollista saada aikaan sellainen tilanne, että kussakin kupungissa olisi ainakin yksi pakoreitti vartioituna? Tällaisessa tilanteessa rosvo voidaan aina saartaa seuraavalla vuorolla, sillä meni rosvo mihin kaupunkiin tahansa, voidaan kolme partiota siirtää jäljellä olevien pakoreittien päälle. Onnistuuko rosvon aina karata kaupunkiin, josta lähtevien vapaiden reittien määrä on suurempi kuin helikopterien määrä? Jos helikoptereita on käytössä vain yksi, poliisien tulee ehkä joukkovoimalla yrittää rajata rosvo jonkun pienemmän alueen sisään, josta sillä ei ole ulospääsyä, ja hitaasti hivuttaa rosvon oloa yhä tukalammaksi.

Kunkin verkon viereen voi pirtää valmiiksi talukon, johon on kirjattu poliisien ja helikopterien lukumääriä, ja johon tulee täydentää tieto siitä, kumpi pelaaja voittaa missäkin tilanteessa. Yksi pelilauta ja sitä vastaava täydennetty taulukko on piirretty kuvaan 2. Kullakin poliisien ja helikopterien määrällä kannattaa pelata muutamaan kertaan, jotta tiedetään, ettei voitto johtunut vain toisen pelaajan virheestä. Hienoa on, jos voittostrategia osataan päätellä joka tilanteessa.

Hauskaa on myös kokeilla verkkoja, jotka ovat eri näköisiä, mutta silti isomorfisia, kuten kuvassa 3. Voisiko tiedolla siitä, onko p poliisia ja h helikopteria riittävä määrä rosvon saartamiseen, päätellä jotakin valtion (siis verkon) rakenteesta?

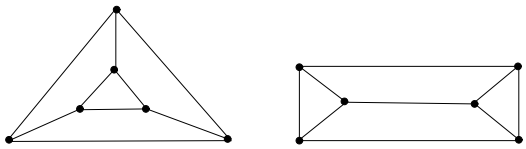
	2 poliisia	3 poliisia	4 poliisia
1 kopteri	rosvo	rosvo	poliisit
2 kopteria	rosvo	poliisit	poliisit
3 kopteria	rosvo	poliisit	poliisit



Kuva 2: Taulukkoon on kirjattu kummalla pelaajista on voittostrategia, kun peliä pelataan kuvan laudalla. Kahdella poliisipartiolla rosvoa ei voi saartaa, sillä kustakin kaupungista johtaa kolme tietä ulos. Jos kolmella poliisipartiolla on käytettävissään vain yksi helikopteri, on rosvon voittostrategia siirtyä aina sellaiseen kaupunkiin, josta pääsee

[1] Koska yksi poliisi voi olla kerrallaan vain kahden kaupungin vieressä, voi kolme partiota tukkia korkeintaan kuusi pakoreittiä kerrallaan, eli kaksi pakoreittiä korkeintaan kolmesta kaupungista. Aina on siis yksi kaupunki, josta pääsee pois kahta reittiä.

pois vähintään kahta vapaata reittiä[1]. Jos taas kolmella poliisipartiolla on kaksi kopteria, poliisit voittavat. Kolme partiota voidaan järjestää laudalle niin, että kustakin kaupungista on vähintään yksi pakoreitti suljettuna. Siirtyi rosvo tämän jälkeen mihin tahansa, se voidaan saartaa siirtämällä kaksi muuta partiota jäljellä olevien pakoreittien päälle. Neljä partiota voidaan asetella sulkemaan kunkin kaupungin ulostuloista kaksi. Tämän jälkeen rosvon saartamiseen riittää yksikin kopteri.



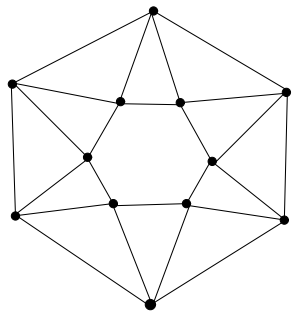
Kuva 3: Kuvan kaksi verkkoa ovat erinäköiset, mutta kuitenkin isomorfiset. Tämä tarkoittaa sitä, että jokaiselle somulle vasemmalla olevassa verkossa voidaan löytää yksikäsitteinen vastinsolmu oikealla olevassa verkossa siten, että vasemmalla kahden solmun välillä on särmä jos ja vain jos niiden vastinsolmujen välillä on särmä.

Timanttipeli

Esittelen tässä esimerkin vuoksi vielä yhden vaikeamman pelilaudan. Kuvassa 4 on esitelty timanttipelilauta ja voittotilanne eri poliisien ja helikopterien määrillä. Kolmella poliisilla ei selvästikään voida rosvoa saartaa, sillä jokaisesta kaupungista lähtee neljä tietä. Samoin jos poliisivoimilla on käytössään neljä helikopteria ja neljä poliisipartiota, voidaan rosvon kaupunki aina saartaa välittömästi. Minkälaisia voittostrategioita pelaajilla on muissa tilanteissa? Seuraavassa on muutamia näkökohtia ongelmaan, vaikkakin yksityiskohtaiset matemaattiset perustelut sivuutetaan.

Nokkela poliisipelaaja voi huomata, että kuudella partiolla pelilauta voidaan jakaa kahteen osaan siten, ettei rosvo pääse puolelta toiselle. Tutkitaan tapausta, jossa poliisivoimilla on kuusi partiota ja kaksi helikopteria. Poliisien voittostrategia on jakaa lauta ensin kahtia niin, että kummallekin puolelle jää kuusi kaupunkia, eikä rosvo pääse puolelta toiselle. Tämän jälkeen poliisit voivat kahta partiota vuorollaan siirtäen rajata rosvon alaa yhä pienemmäksi ja pienemmäksi. Jos helikoptereita on vain yksi, tämä ei onnistu, sillä yhtä partiota siirrettäessä syntyy väkisin reitti toiselle puolelle. Yhden kopterin tilanteessa tarvitaan seitsemäs partio estämään tämä.

Viisi partiota ei riitä, vaikka poliiseilla olisi käytettävissään kolmekin kopteria. Koska yksi partio voi olla kerrallaan vain kahden kaupungin vieressä, voi viidellä poliisipartiolla päästä korkeintaan kymmenen kaupungin vierelle. Tällöin jää ainakin yksi kaupunki, josta lähteville teille ei riitä yhtään poliisia. Rosvon voittostrategia on aina siirtyä sellaiseen kaupunkiin. Jos (ja kun) rosvo voi aina pysyä neljän pakoreitin kaupungissa, ei sitä voida kolmella helikopterilla saartaa.



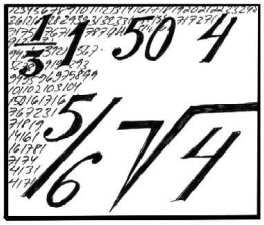
	4 poliisia	5 poliisia	6 poliisia	7 poliisia
1 kopteri	rosvo	rosvo	rosvo	poliisit
2 kopteria	rosvo	rosvo	poliisit	poliisit
3 kopteria	rosvo	rosvo	poliisit	poliisit
4 kopteria	poliisit	poliisit	poliisit	poliisit

Kuva 4: Taulukkoon on kirjattu timanttilaudalla pelatun pelin voittostaretegian omaava pelaaja kullakin varustelutasolla.

Matemaattinen tausta

Vaikka tietokoneet voivat laskea yhä nopeammin ja nopeammin, on silti tärkeää yrittää rakentaa sellaisia algoritmeja, joilla ongelma ratkeaa mahdollisimman nopealla tavalla. Verkkoteoriasta onkin tullut tärkeä matematiikan osa-alue juuri tietotekniikan sovellusten myötä. Verkkoteoriassa tutkitaan esimerkiksi erilaisten ongelmien vaativuusluokkia. Verkkoteorian ongelman sanotaan ratkeavan polynomisessa ajassa, jos on olemassa polynomi $p(n)$ ja sellainen algoritmi, joka käyttää n:n solmun kokoisella verkolla ongelman ratkaisuun korkeintaan $p(n)$ aikayksikköä. Myös Rosvo ja poliisi -peli liittyy verkkoteorian tutkimukseen ja etäisesti myös vaativuusluokkiin. Voidaan osoittaa, että rosvo- tai poliisipelaajien voittostrategioiden olemassaolo liittyy tietynlaisen logiikan, eli matemaattisesti määritellyn kielen, kykyyn kuvailla verkkojen ominaisuuksia. Professori Lauri Hella käytti eräänlaista rosvo ja poliisi -peliä osoittaessaan, että polynomisessa ajassa ratkeavien ongelmien luokka ei ole sama kuin logiikassa $L^p_{\infty\omega}(\mathbb{Q}_h)$ määriteltävien ongelmien luokka, vaikka sallittaisiin mielivaltaisen suuria arvoja parametreille p ja h.

Polynomisessa ajassa ratkeavien ongelmien joukon tutkimus jatkuu edelleen. Tähän tutkimukseen liittyy myös kuuluisa "$P = NP$?" -ongelma, jonka ratkaisusta Clay Mathematics Institute on luvannut miljoona dollaria. Lyhenteen kirjain P tarkoittaa juuri polynomisessa ajassa ratkeavien ongelmien luokkaa.



Täydellisistä luvuista

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Täydelliseksi luvuksi (*perfect number*) kutsutaan positiivista kokonaislukua, joka on itseään pienempien positiivisten tekijöidensä summa. Esimerkiksi luku 6 on täydellinen, sillä $6 = 1 + 2 + 3$. Samoin luku 28 on täydellinen, sillä sen itseään pienemmät positiiviset tekijät ovat 1, 2, 4, 7 ja 14 ja $1+2+4+7+14 = 28$. Täydelliset luvut ovat kiinnostaneet matemaatikoita jo tuhansien vuosien ajan ja niihin liittyy eräitä matematiikan vanhimpia ratkaisemattomia ongelmia.

Eukleides lienee ensimmäinen täydellistä luvuista tuloksia julkaissut matemaatikko. Hänen Elementansa on parhaiten tunnettu geometrian aksiomaattisesta esityksestä, mutta se sisältää myös merkittäviä lukuteorian tuloksia. Niistä tunnetuin on kaikkien aikojen kauneimmaksi matemaattiseksi todistukseksi mainittu todistus sille, että alkulukuja on ääretön määrä. Eukleides todisti myös, että kaikki muotoa

$$a = 2^{m-1}(2^m - 1)$$

olevat parilliset luvut, missä $2^m - 1$ on alkuluku, ovat täydellisiä. Vasta 1700-luvulla Euler onnistui todistamaan, että muita parillisia täydellisiä lukuja ei ole olemassa. Käymme läpi Eukleideen ja Eulerin todistukset esiteltyämme aluksi eräitä apukäsitteitä.

Aritmetiikan peruslauseen mukaan luvun $a \in \mathbb{Z}_+$ alkutekijähajotelma

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n},$$

missä a:n alkutekijät $p_1, p_2, ..., p_n$ ovat suuruusjärjestyksessä, on yksikäsitteisesti määrätty. Jos a on alkuluku, niin a tulkitaan yksitekijäiseksi tuloksi. Luvun *a kaikkien positiivisten tekijöiden* (a mukaan lukien) *summa* on

$$\sigma(a) = (1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{k_1}) \cdot (1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_n + p_n^2 + \ldots + p_n^{k_n}),$$

mikä geometrisen summan kaavan perusteella sievenee muotoon

$$\sigma(a) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n^{k_n+1} - 1}{p_n - 1}.$$

Alkuluvulle p on $\sigma(p) = 1 + p$ ja jos $\mathrm{syt}(a, b) = 1$, niin $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.

Voimme nyt muotoilla täydellisyysehdon täsmällisesti ja todistaa Eukleideen ja Eulerin keksimät parillisia täydellisiä lukuja koskevat tulokset.

Määritelmä: *Luku $a \in \mathbb{Z}_+$ on täydellinen, jos sen kaikkien positiivisten tekijöiden summa on $2a$ eli $\sigma(a) = 2a$.*

Eukleides: *Jos $m \geq 2$ ja $2^m - 1$ on alkuluku, niin $a = 2^{m-1}(2^m - 1)$ on täydellinen luku.*

Todistus. Laskemme luvun $a = 2^{m-1}(2^m - 1)$ kaikkien positiivisten tekijöiden summan.

Koska $\mathrm{syt}(2^{m-1}, 2^m - 1) = 1$ ja $2^m - 1$ on alkuluku, on

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \sigma\big(2^{m-1}(2^m-1)\big) = \sigma\big(2^{m-1}\big)\sigma\big(2^m-1\big)\\ &= \frac{2^m-1}{2-1}(1+2^m-1) = 2^m(2^m-1) = 2a,\end{aligned}$$

joten a on täydellinen.

Euler: *Jos $a \in \mathbb{Z}_+$ on parillinen ja täydellinen luku, niin $a = 2^{m-1}(2^m-1)$, missä $m \geq 2$ ja $2^m - 1$ on alkuluku.*

Todistus. Koska a on parillinen, voimme kirjoittaa sen muotoon $a = 2^{m-1}k$, missä $m \geq 2$ ja k on pariton. Tällöin $\mathrm{syt}(2^{m-1}, k) = 1$ ja

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \sigma\big(2^{m-1}k\big) = \sigma\big(2^{m-1}\big)\sigma(k)\\ &= \frac{2^m-1}{2-1}\sigma(k) = (2^m-1)\sigma(k).\end{aligned}$$

Toisaalta, koska a on täydellinen, on

$$\sigma(a) = 2a = 2 \cdot 2^{m-1}k = 2^m k\ .$$

Näin saadaan yhtälö

$$(2^m-1)\sigma(k) = 2^m k.$$

Koska $\mathrm{syt}(2^m, 2^m-1) = 1$, on aritmetiikan peruslauseen mukaan k:n ja $\sigma(k)$:n oltava (2^m-1):n ja 2^m:n samoja monikertoja eli on olemassa luku $c \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$k = c \cdot (2^m-1) \text{ ja } \sigma(k) = c \cdot 2^m\ .$$

Luvun k tekijöiden c ja $c \cdot (2^m-1)$ summa on $c \cdot 2^m = \sigma(k)$, joten k:lla ei voi olla muita tekijöitä. Koska k:lla kuitenkin on tekijät 1 ja 2^m-1, ei ole muuta mahdollisuutta kuin $c = 1$ ja $k = 2^m - 1$ on alkuluku. Täten $a = 2^{m-1}(2^m-1)$ ja väite on todistettu.

Yhdistämme Eukleideen ja Eulerin tulokset lauseeksi:

Lause: *Parillinen luku a on täydellinen jos ja vain jos $a = 2^{m-1}(2^m-1)$, missä $m \geq 2$ ja $2^m - 1$ on alkuluku.*

Lause ratkaisee parillisten täydellisten lukujen ongelman lähes täydellisesti. Vain niiden lukumäärä jää arvoitukseksi. Parillisia, täydellisiä lukuja on yhtä paljon kuin muotoa $2^m - 1$ olevia alkulukuja eli *Mersennen alkulukuja*. Niitä otaksutaan olevan äärettömän monta, mutta otaksumaa ei toistaiseksi ole onnistuttu todistamaan.

Parittomista täydellisistä luvuista tiedetään vähemmän. Yhtään sellaista ei tunneta, eikä myöskään osata todistaa, että niitä ei olisi. Tiedetään kuitenkin, että lukua 10^{300} pienempiä parittomia täydellisiä lukuja ei ole olemassa. Parittomien täydellisten lukujen olemassaolo lienee matematiikan vanhin ratkaisematon ongelma.

Määrittelemme vielä *Eulerin funktion* ϕ, koska täydelliset luvut voidaan tavallaan karakterisoida sen avulla.

Määritelmä: *Jos m on positiivinen kokonaisluku, niin $\phi(m)$ on niiden lukua m pienempien positiivisten kokonaislukujen lukumäärä, joiden suurin yhteinen tekijä luvun m kanssa on 1. Erikseen sovitaan, että $\phi(1) = 1$.*

Esimerkiksi $\phi(12) = 4$. Eulerin funktiolla on seuraavia ominaisuuksia, joiden todistamisen jätämme harjoitustehtäväksi:

- Jos p on alkuluku, niin $\phi(p) = p - 1$.
- Jos p on alkuluku ja $m \in \mathbb{Z}_+$, niin $\phi(p^m) = p^m - p^{m-1}$.
- Jos p ja q ovat alkulukuja, niin $\phi(pq) = (p-1)(q-1)$.
- Jos $\mathrm{syt}(a, b) = 1$, niin $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.
- Jos luvun $a \in \mathbb{Z}_+$ alkutekijähajotelma on $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$, niin
$$\phi(a) = a\big(1 - \frac{1}{p_1}\big)\big(1 - \frac{1}{p_2}\big)\ldots\big(1 - \frac{1}{p_n}\big).$$

Myös täydellisten lukujen ja Eulerin funktion välisen yhteyden todistamisen jätämme harjoitustehtäväksi:

Lause: *Luku $a \in \mathbb{Z}_+$, jonka alkutekijähajotelma on $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$, on täydellinen jos ja vain jos*

$$\phi(a) = \frac{1}{2}\big(p_1^{k_1} - \frac{1}{p_1}\big)\big(p_2^{k_2} - \frac{1}{p_2}\big)\ldots\big(p_n^{k_n} - \frac{1}{p_n}\big).$$

Harjoitustehtäviä:

1. Määritä neljä pienintä täydellistä lukua.
2. Osoita, että täydellisen luvun kaikkien positiivisten tekijöiden käänteislukujen summa on 2.
3. Olkoon p alkuluku ja $m \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että p^m ei ole täydellinen luku.
4. Osoita, että jos pariton täydellinen luku on olemassa, niin sillä on vähintään kolme eri alkutekijää.
5. Olkoot $p_1, p_2, \ldots, p_n$ keskenään erisuuria, parittomia alkulukuja. Osoita, että $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ ei ole täydellinen luku.
6. Todista tekstissä esitetyt Eulerin funktion ominaisuudet sekä lause, jossa todetaan täydellisten lukujen ja Eulerin funktion välinen yhteys. Osoita erityisesti, että parilliset täydelliset luvut toteuttavat mainitussa lauseessa annetun yhtälön.

Kiitän professori Jorma Merikoskea ja dosentti Pekka Alestaloa kirjoitustani koskeneista arvokkaista huomautuksista.

Kirjallisuutta

1. J. Merikoski, K. Väänänen, T. Laurinolli, Matematiikan taito 11: Lukuteoria ja logiikka. Weilin+Göös, 1995.
2. E. Weisstein, Eric Weisstein's world of mathematics. Wolfram Research. http://mathworld.wolfram.com/
3. K. Väisälä, *Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet*, Otava 1961.

Tuomaksen tehtäviä

Tuomas Korppi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Tehtäväsi on auttaa ristinollaturnauksen järjestäjiä erilaisten turnausjärjestelmiä koskevien ongelmien kanssa. Sinun täytyy myös todistaa ratkaisusi oikeiksi.

Ensimmäinen turnausjärjestelmä on ”voittaja jatkoon” -tyyppinen: Ensin kaikki pelaajat arvotaan pareiksi, jotka pelaavat pelin ristinollaa voittoon saakka (tasapeli ei ole mahdollinen). Tämän jälkeen otteluiden voittajat pääsevät seuraavalle kierrokselle, ja häviäjät tippuvat. Jos pelaajia oli pariton määrä, pääsee ilman paria jäänyt pelaaja automaattisesti seuraavalle kierrokselle. Toisella kierroksella pelaajat arvotaan taas pareiksi, joiden pelaamien pelien voittajat pääsevät kolmannelle kierrokselle ja häviäjät tippuvat (taas, jos joku pelaaja jäi ilman paria, hän pääsee automaattisesti seuraavalle kierrokselle.) Jatketaan samoin, kunnes jäljellä on vain yksi pelaaja, turnauksen voittaja.

Alussa turnauksessa on n pelaajaa.

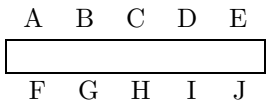
1. Kuinka monta peliä turnauksessa pelataan yhteensä?

2. Millä n:n arvoilla koko turnauksessa ei synny sellaista tilannetta, jossa jollekin pelaajista ei arvonnassa löytyisi paria, ja hän pääsisi automaattisesti seuraavalle kierrokselle?

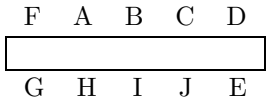
3. Kuinka monta kierrosta turnauksessa on?

Turnauksen järjestäjät muuttavat kuitenkin mieltään ja päättävät järjestää turnauksen, jossa jokainen pelaa kerran jokaista vastaan.

Oletetaan, että pelaajia on parillinen määrä (pelaajien lukumäärästä ei tiedetä mitään muuta). Pelaajat istuvat pitkän pöydän molemmin puolin, ja vastakkain istuvat pelaavat keskenään. Aina ottelun jälkeen jokainen siirtyy yhden paikan verran myötäpäivään, ja taas vastakkain istuvat pelaavat keskenään. Näin jatketaan, kunnes joku pelaaja saa vastaansa pelaajan, jota vastaan hän on pelannut aiemmin. Tällöin turnaus on lopussa, ja eniten voittoja kerännyt pelaaja on (tai keränneet pelaajat ovat) turnauksen voittaja (voittajia).



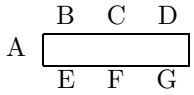
Esimerkiksi A pelaa F:ää vastaan, B pelaa G:tä vastaan jne.



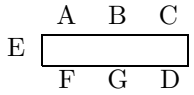
Tilanne sen jälkeen, kun ylemmästä kuvasta on vaihdettu paikkoja yhden kerran.

4. Toimiiko yllä esitetty turnausjärjestelmä, eli pelaavatko kaikki pelaajat kaikkia muita vastaan?

Oletetaan sitten, että pelaajia on pariton määrä (pelaajien lukumäärästä ei tiedetä mitään muuta). Nyt toimitaan samoin kuin yllä, mutta pöydän toisessa päädyssä on lepääjän paikka, jossa istuva pelaaja ei pelaa kyseisellä kierroksella.



Esimerkiksi A lepää, B pelaa E:tä vastaan, C pelaa F:ää vastaan jne.



Tilanne paikanvaihdon jälkeen.

5. Toimiiko yllä esitetty turnausjärjestelmä, eli pelaavatko kaikki kaikkia vastaan?

6. Jos vastasit jompaan kumpaan kysymyksistä 4 tai 5 ”ei”, kehitä toimiva turnausjärjestelmä: Millaisella systeemillä pelaajat kannattaisi jakaa pareihin niin, että kullakin kierroksella korkeintaan yksi pelaaja lepää, ja kaikki pelaajat pelaavat kaikkia vastaan täsmälleen yhden kerran?

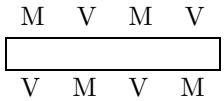
Ratkaisut

1. $n-1$ peliä. Todistus: Jokaisessa pelissä tippuu yksi pelaaja, ja jokainen pelaaja paitsi voittaja tippuu kerran.

2. Pelaajien lukumäärän pitää olla kakkosen potenssi. Todistus: Kirjoitetaan $n = 2^k p$, missä p on pariton luku. Kukaan ei pääse automaattisesti seuraavalle kierrokselle jos ja vain jos kierroksen pelaajien lukumäärä on parillinen. Jos $p = 1$, ovat kierrosten pelaajien lukumäärät $2^k, 2^{k-1}, 2^{k-2}, \ldots, 2$, jonka jälkeen jäljellä on vain yksi pelaaja, voittaja. Jos $p > 1$, on $k+1$:nnella kierroksella pariton määrä p pelaajia, ja joku pääsee automaattisesti jatkoon.

3. Olkoon n' pienin kakkosen potenssi, joka on vähintään n. Nyt kierrosten lukumäärä on 2-kantainen logaritmi luvusta n', siis $\log_2 n'$. Todistus: Induktio kierrosten lukumäärän k suhteen.

4. Ei toimi. Oletetaan, että joka toisella pelaajalla on päässään musta hattu ja joka toisella valkea, ja että ensimmäisellä kierroksella mustahattuinen pelaa aina valkeahattuista vastaan. Nähdään helposti, että mustahattuiset pelaavat valkeahattuisia vastaan myös paikanvaihdon jälkeen. Näin ollen mustahattuiset eivät pelaa koskaan keskenään, eivätkä valkeahattuiset myöskään keskenään. Huomaa, että esitetty päättely toimii millä tahansa parillisella pelaajien lukumäärällä.

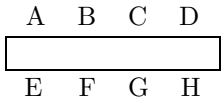


(Mieti tilanne paikanvaihdon jälkeen!)

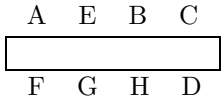
5. Toimii. Syy on se, että n:n kierroksen aikana jokainen istuu kerran jokaisella paikalla. Osoitetaan, että n:n kierroksen aikana jokainen pelaa vähintään kerran jokaista vastaan. Olkoon x pelaaja, ja y toinen pelaaja. Oletetaan, että y on k paikkaa x:ää jäljessä kierrossa, jolloin x:n ja y:n välissä on $k-1$ tyhjää paikkaa. Jos k on parillinen, x ja y pelaavat vastakkain, kun x istuu ylärivissä $k/2$:nnella paikalla vasemmalta lukien. Jos k on pariton, x ja y pelaavat vastakkain, kun x istuu alarivissä $(k+1)/2$:nnella paikalla oikealta lukien. Huomaa, että päättely toimii millä tahansa parittomalla pelaajien lukumäärällä.

n:n kierroksen aikana x pelaa vähintään kerran jokaista muuta $n-1$:tä pelaajaa vastaan, ja lepää kerran. Lisäksi $n-1$:tä pelaajaa vastaan kerran pelaaminen ja kerran lepääminen vaatii n kierrosta, joten x ei ehdi pelata ketään vastaan kahta kertaa. Näin ollen turnaus kestää n kierrosta, eikä ketään pariteta uudestaan samaa pelaajaa vastaan n:n ensimmäisen kierroksen aikana.

6. Systeemi on seuraava parilliselle pelaajien lukumäärälle: Vasemmassa yläkulmassa on ankkuripelaaja A, joka istuu paikallaan koko turnauksen ajan. Muut pelaajat kiertävät myötäpäivään yhden paikan verran, paitsi että kierrossa aina hypätään ankkuripelaajan yli.

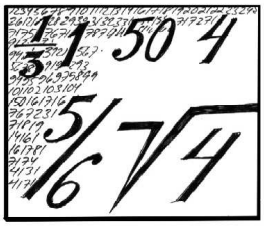


vaihtuu järjestykseksi



Systeemi toimii, koska se on olennaisesti sama kuin kohdan 5 systeemi. Nyt vain kohdan 5 lepääjä pelaa ankkuria vastaan. Koska kohdassa 5 jokainen lepää kerran (jos joku lepäisi kahdesti, hän ei ehtisi pelata kaikkia muita vastaan, jos taas joku ei lepäisi ollenkaan, hän pelaisi kahdesti samaa vastustajaa vastaan), jokainen pelaa kerran ankkuria vastaan.

Huom! Kohtien 5 ja 6 systeemit ovat oikeasti käytössä ainakin pienissä go-turnuksissa.



Verrannollisuudesta pintaa syvemmältä

Teuvo Laurinolli
International Baccalaureate, Tukholma

Johdanto

Yläkoulun matematiikan oppikirjan [1] tekstiä työstäessäni jouduin pohtimaan (suoraan) verrannollisuuden määritelmän muotoilua. Yleinen ehto sille, että positiivisia reaaliarvoja saavat muuttujat x ja y ovat verrannollisia, on, että kaikilla $p > 0$

(A) muuttujan x arvon p-kertaistuessa myös muuttujan y arvo p-kertaistuu.

Entäpä, jos yksinkertaisuuden vuoksi rajoituttaisiin vaatimaan ehdon voimassaolo vain jollakin tietyllä $p \neq 1$, esimerkiksi $p = 2$? Olisiko tämä matemaattisesti pätevä verrannollisuuden ehto? Eli seuraako yleinen ehto (A) esimerkiksi erityisestä ehdosta

(B) muuttujan x arvon kaksinkertaistuessa myös muuttujan y arvo kaksinkertaistuu?

On helppo nähdä, että ehto (A) on yhtäpitävä sen kanssa, että $y = cx$, missä c on positiivinen vakio (eli muuttujan y arvo, kun $x = 1$).

Kysymys voidaan matematisoida seuraavasti.

Ongelma. Olkoon f funktio, jonka määrittely- ja arvojoukkona ovat positiiviset reaaliluvut ja olkoon $f(1) = c$. Oletetaan, että

$$f(2x) = 2f(x) \text{ kaikilla } x > 0. \tag{1}$$

Onko silloin välttämättä

$$f(x) = cx \text{ kaikilla } x > 0? \tag{2}$$

Jäljempänä esitettävät vastaukset[2] ovat voimassa yleisemminkin, kun ehdossa (1) vakio 2 korvataan millä tahansa positiivisella vakiolla $p \neq 1$. On ilmeistä, että implikaation (1) $\Rightarrow$ (2) voimassaolo riippuu siitä, millaisia rajoituksia funktiolle f asetetaan. Tarkastelemme seuraavassa ensiksi tapausta, jossa f on derivoituva ja sitten tapausta, jossa f on ainoastaan jatkuva. Oletamme jatkossa ilman eri mainintaa, että funktion f määrittely- ja arvojoukkona ovat positiiviset reaaliluvut.

Tapaus 1: f derivoituva

Seuraava lause osoittaa, että tässä tapauksessa vastaus ongelmaamme on myönteinen, kun oletetaan lisäksi, että f:n derivaatalla on raja-arvo kohdassa $x = 0$.

[2] Esitin ongelman marraskuussa 2004 Jorma Merikoskelle, joka mobilisoi nopeasti pienen tutkijaryhmän pohtimaan sitä. Ryhmä kävi aiheesta vilkasta sähköpostikeskustelua marras-joulukuussa 2004. Keskustelun tulokset on esitetty kattavasti artikkelissa [2], johon tämä kirjoitus perustuu.

Lause 1. *Oletetaan, että f on kaikkialla derivoituva ja $\lim_{x\to 0} f'(x) = c$. Silloin implikaatio (1) $\Rightarrow$ (2) on voimassa.*

Todistus. Derivoimalla yhtälö $f(2x) = 2f(x)$ puolittain ja soveltamalla vasemmalla puolella ketjusääntöä saadaan $2f'(2x) = 2f'(x)$, josta edelleen $f'(2x) = f'(x)$. Tästä seuraa sijoittamalla $t = 2x$, että $f'(t) = f'(\frac{t}{2})$ ja edelleen induktiolla, että $f'(t) = f'(\frac{t}{2^n})$ kaikilla luonnollisilla luvuilla n.

Siis

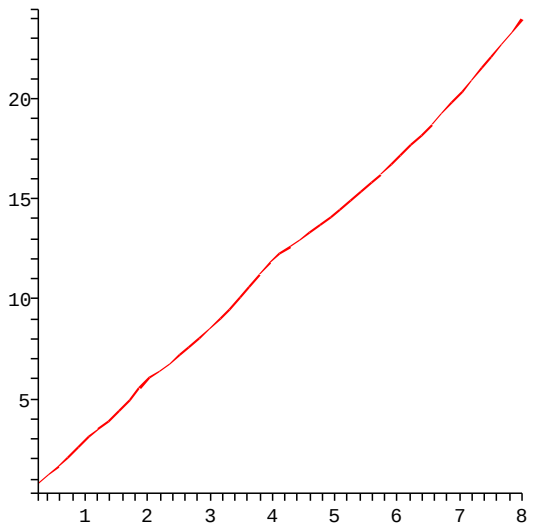
$$\begin{aligned} c &= \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'(\tfrac{t}{2^n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} f'(t) = f'(t). \end{aligned}$$

Koska $f'(x) = c$ identtisesti, niin $f(x) = cx$ ja $c = f(1)$. □

Didaktinen huomautus 1. Tarkasteltaessa empiiristen suureiden x ja y välistä riippuvuutta peruskoulutasolla voitaneen lauseen 1 oletusten katsoa olevan voimassa. Lauseen 1 tulos merkitsee silloin, että verrannollisuuden määritelmä voidaan yleisyyden kärsimättä yksinkertaistaa ehdoksi (B).

Tapaus 2: f jatkuva

Ruokahalu kasvaa syödessä. Säilyykö lause 1 voimassa, jos sen oletuksia kevennetään esimerkiksi vaatimalla funktiolta f ainoastaan jatkuvuutta? Vastaus on kielteinen, kuten seuraava vastaesimerkki osoittaa.



KUVA: Vastaesimerkin funktion kuvaaja välillä $[\frac{1}{4}, 8]$.

Vastaesimerkki. Määritellään funktio f paloittain asettamalla

$$f(x) = 2^{-n}x^2 + 2^{n+1}, \text{ kun } 2^n \le x < 2^{n+1},$$

kaikilla kokonaisluvuilla n. Lukija voi harjoitustehtävänä todentaa, että f on kaikkialla jatkuva ja toteuttaa ehdon (1), mutta ei ehtoa (2).

Huomautus. Vastaesimerkin takana on intuitiivinen geometrinen konstruktio, jossa piirretään ensin jonkinlainen käyränpätkä funktiolle f välillä $1 \le x < 2$ (tässä tapauksessa $f(x) = x^2 + 2$) ja siirretään sitten tämä pätkä sopivasti venytettynä väleille $2 \le x < 4$, $4 \le x < 8$ jne. sekä kutistettuna väleille $\frac{1}{2} \le x < 1$, $\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}$ jne. ja varmistetaan jatkuvuus liitoskohdissa.

Implikaation (1) $\Rightarrow$ (2) kaatuminen jatkuville funktioille haastaa meidät pohtimaan, onko ehtoa (1) mahdollista vahvistaa niin, että implikaatio olisi tässäkin tapauksessa pätevä. Seuraako (2) esimerkiksi ehdosta

$$f(2x) = 2f(x) \text{ ja } f(3x) = 3f(x) \text{ kaikilla } x > 0 \quad (1+)$$

Lause 2 antaa tähän kysymykseen myönteisen vastauksen. Lauseen todistus perustuu kiinnostavalla tavalla seuraavaan Dirichlet'n tulokseen (ks. [3], s. 16).

Lemma. (Dirichlet) *Olkoon α irrationaaliluku. Luvut $m + n\alpha$, missä m ja n ovat mielivaltaisia kokonaislukuja, ovat tiheässä reaalilukujen joukossa. Toisin sanoen jokaisella reaalilukuvälillä, kuinka lyhyellä tahansa, on muotoa $m + n\alpha$ olevia lukuja.*

Lause 2. *Oletetaan, että f on kaikkialla jatkuva ja $f(1) = c$. Silloin implikaatio (1+) $\Rightarrow$ (2) on voimassa.*

Todistus. Olkoon $S = \{2^m 3^n \mid m \text{ ja } n \text{ ovat kokonaislukuja}\}$. Ehdosta (1+) seuraa induktiolla, että jos x kuuluu joukkoon S eli $x = 2^m 3^n$, niin $f(x) = cx$. Väite seuraa tästä, jos voimme näyttää, että S on tiheä positiivisten reaalilukujen joukossa. Jos nimittäin jatkuvat funktiot f ja cx yhtyvät f:n määrittelyjoukon tiheässä osajoukossa, niin ne yhtyvät koko määrittelyjoukossa. Mutta joukko S on tiheä positiivisten reaalilukujen joukossa jos ja vain jos sen logaritmijoukko

$$T = \ln S = \{m \ln 2 + n \ln 3 \mid m \text{ ja } n \text{ ovat kokonaislukuja}\}$$

on tiheä kaikkien reaalilukujen joukossa. Jakamalla joukon T alkiot luvulla $\ln 2$ saadaan joukko

$$U = \frac{T}{\ln 2} = \left\{ m + n\frac{\ln 3}{\ln 2} \;\middle|\; m \text{ ja } n \text{ ovat kokonaislukuja} \right\}.$$

Mutta Dirichlet'n lemman perusteella U on tiheä reaalilukujen joukossa, sillä luku $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ on irrationaalinen. Tällöin myös T on tiheä, joten väite on todistettu. □

Didaktinen huomautus 2. Jos lähdetään siitä, että muuttujien x ja y riippuvuus on jatkuvaa (mutta ei välttämättä derivoituvaa), niin muuttujien verrannollisuusehto voidaan lauseen 2 nojalla pelkistää muotoon

(C) muuttujan x arvon kaksinkertaistuessa tai kolminkertaistuessa myös muuttujan y arvo kaksinkertaistuu tai kolminkertaistuu.

On helppo nähdä, että lauseen 2 ehdossa (1+) tekijät 2 ja 3 korvata millä tahansa positiivisilla luvuilla p ja q, joilla osamäärä $\frac{\ln q}{\ln p}$ on irrationaalinen. Näin on, jos luvuilla p ja q ei ole yhtään yhteistä potenssia ts. $p^m \neq q^n$ kaikilla kokonaisluvuilla m, n, minkä lukija voi harjoitustehtävänä todentaa. On siis voimassa yleinen tulos

Lause 3. *Oletetaan, että f on kaikkialla jatkuva ja $f(1) = c$. Oletetaan lisäksi, että*

$$f(px) = pf(x) \text{ ja } f(qx) = qf(x) \text{ kaikilla } x > 0,$$

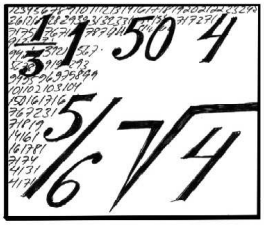
missä p ja q ovat positiivisia lukuja, joilla $p^m \neq q^n$ kaikilla kokonaisluvuilla m, n. Silloin on $f(x) = cx$ kaikilla $x > 0$.

Viitteet

1. Teuvo Laurinolli, Erkki Luoma-aho, Timo Sankilampi, Kirsi Talvitie, Outi Vähä-Vahe, Laskutaito 8. WSOY. Helsinki, 2004.

2. Markku Halmetoja, Pentti Haukkanen, Teuvo Laurinolli, Jorma K. Merikoski, Timo Tossavainen and Ari Virtanen, On direct proportionality. Department of Mathematics, Statistics and Philosophy, University of Tampere, Report A 358, 2005. `http://mtl.uta.fi/matematiikka/julkaisut/OnDirectProportionality.pdf`

3. A. Browder, Mathematical Analysis: An Introduction. Springer, 1996.



Jaksollisista funktioista

Jukka Liukkonen
Yliopettaja
Helsingin ammattikorkeakoulu Stadia

Ympärillämme ja jopa sisällämme on runsaasti jaksollisina toistuvia ilmiöitä: päivä seuraa yötä, kesä talvea, sydän lyö tahdissa, mainingit keinuttavat venettä, varpuspöllö toistaa yks'totista vihellystään varhaiskevään hämärässä. Jaksollisen ilmiön matemaattinen malli on jaksollinen funktio. Millaisia jaksoja funktiolla voi olla? Onko jaksollisten funktioiden summa aina jaksollinen? Voiko kahden jaksollisen funktion summalla olla lyhyempiä jaksoja kuin yhteenlaskettavilla funktioilla?

Jaksollisten funktioiden perusominaisuuksia

Noudatamme yleistä käytäntöä ja merkisemme luonnollisten lukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, kokonaislukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{Z}$, rationaalilukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{Q}$ ja reaalilukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{R}$. Reaalilukua p sanotaan funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jaksoksi*, jos yhtälö $f(t+p) = f(t)$ toteutuu kaikilla reaaliluvuilla t. Tällöin merkitään

$$f(t+p) \equiv f(t).$$

Funktio f on *jaksollinen*, jos sillä on ainakin yksi nollasta eroava jakso. Kahden jakson p ja q summa ja erotus ovat jaksoja, sillä

$$f(t+p+q) \equiv f(t+p) \equiv f(t),$$
$$f(t+p-q) \equiv f(t+p-q+q) \equiv f(t+p) \equiv f(t).$$

Valitsemalla $q = p$ ja toistamalla edellistä päättelyä havaitaan, että jakson p monikerta np on jakso kaikilla kokonaisluvuilla n.

Esimerkki 1.

(a) Funktio $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jaksollinen; jaksot muodostavat joukon $\{\, 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$.

(b) Mikä tahansa reaaliluku kelpaa vakiofunktion $f(t) \equiv c$ jaksoksi.

(c) Määrittelemme jokaista reaalilukua t kohti joukon $t + \mathbb{Q}$ asettamalla

$$t + \mathbb{Q} = \{\, t + r \mid r \in \mathbb{Q} \,\}. \tag{1}$$

Jos t_1 ja t_2 ovat reaalilukuja, on vain kaksi vaihtoehtoa: joko $t_1 + \mathbb{Q} = t_2 + \mathbb{Q}$ tai $t_1 + \mathbb{Q} \cap t_2 + \mathbb{Q} = \emptyset$. Toisin sanoen joukot (1) ovat keskenään *erillisiä*. Ehto $t_1 + \mathbb{Q} = t_2 + \mathbb{Q}$ toteutuu täsmälleen silloin, kun $t_1 - t_2 \in \mathbb{Q}$. Joukkojen (1) yhdiste on tietenkin koko $\mathbb{R}$. Tällaista kokoelmaa joukon $\mathbb{R}$ erillisiä osajoukkoja, joiden yhdiste on $\mathbb{R}$, kutsutaan joukon $\mathbb{R}$ *ositukseksi*, ja $\mathbb{R}$ on joukkojen (1) *erillinen yhdiste*. On tapana merkitä

$$\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{\, t + \mathbb{Q} \mid t \in \mathbb{R} \,\}.$$

Intuitiivisesti tuntuu selvältä, että jokaista joukon $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ alkiota $\Phi \subset \mathbb{R}$ voidaan valita edustamaan yksi joukon Φ alkio[3]; merkittäköön sitä symbolilla $\varphi(\Phi) \in \Phi$. Tällä tavoin saadaan ns. *valintakuvaus*

$$\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad \Phi \mapsto \varphi(\Phi).$$

Edellä sanotun perusteella kaikki rationaaliluvut ovat yhdistetyn kuvauksen

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \varphi(t + \mathbb{Q}).$$

jaksoja, kun taas yksikään irrationaaliluku ei ole jakso.

Jos funktion positiivisten jaksojen joukossa on pienin alkio, sitä sanotaan funktion *perusjaksoksi*. Edellisen esimerkin kuvauksilla f ja ϕ ei ole perusjaksoa. Sinifunktion perusjakso on 2π. Jatkuvan funktion jaksojen äärellinen raja-arvo on aina jakso:

Lemma 2. Jos p_n on jatkuvan funktion f jakso kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja $p_n \to p$ kun $n \to \infty$, raja-arvo p on funktion f jakso.

Todistus. Olkoon t reaaliluku. Koska $t+p_n \to t+p$ kun $n \to \infty$, jatkuvuuden perusteella $f(t+p_n) \to f(t+p)$ kun $n \to \infty$. Jos lisäksi $f(t+p_n) = f(t)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $f(t+p) = f(t)$.□

Lause 3. Jos jatkuva jaksollinen funktio ei ole vakiofunktio, sillä on perusjakso.

Todistus. Olkoon f jatkuva jaksollinen funktio. Merkitään

$$p = \inf \{\, q > 0 \mid q \text{ on funktion } f \text{ jakso} \,\};$$

ts. p on funktion f positiivisten jaksojen suurin alaraja[4]. Tapauksessa $p > 0$ luku p on perusjakso lemman 2 perusteella. Tapauksessa $p = 0$ funktio f on vakio, kuten seuraavasta ilmenee. Olkoon t_0 kiinteä reaaliluku ja $f(t_0) = s_0$. Riittää osoittaa, että $|f(t) - s_0| < \varepsilon$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ olipa $\varepsilon > 0$ miten pieni tahansa. Olkoon siis $\varepsilon > 0$. Jatkuvuuden määritelmän perusteella on olemassa $\delta > 0$, jolle $|f(t) - s_0| < \varepsilon$ kaikilla $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Valitsemme funktiolle f positiivisen jakson $p_\delta < \delta$. Väite seuraa siitä, että f toistaa itseään lukusuoran $\mathbb{R}$ peittävillä väleillä $[t_0 - kp_\delta, t_0 - kp_\delta + p_\delta[$, $k \in \mathbb{Z}$, sillä tällöin $|f(t) - s_0| < \varepsilon$ kaikilla $t \in [t_0 - kp_\delta, t_0 - kp_\delta + p_\delta[$. □

Kuten tarkkasilmäinen lukija huomasi, edellisen todistuksen tapauksessa $p = 0$ funktio f riitti olettaa jatkuvaksi vain yhdessä pistessä s_0. Siis jos funktiolla f on mielivaltaisen pieniä positiivisia jaksoja, ja f on jatkuva yhdessäkin pisteessä, niin f on itse asiassa vakiofunktio.

Reaalilukua $\delta > 0$ sanotaan reaalilukujen x ja y *yhteiseksi mitaksi*, jos $x = a\delta$ ja $y = b\delta$ joillakin kokonaisluvuilla a ja b. Lukuja x ja y sanotaan *yhteismitallisiksi*, jos niillä on yhteinen mitta; muussa tapauksessa x ja y ovat *yhteismitattomat*. Luku nolla on yhteismitallinen kaikkien muiden lukujen kanssa. On hyvin helppoa osoittaa, että x ja y ovat yhteismitattomat täsmälleen silloin, kun seuraava ehto on voimassa: jos $m, n \in \mathbb{Z}$ ja $mx + ny = 0$, niin $m = n = 0$. Lukujen yhteismitattomuuden käsite muistuttaa siis vektorien lineaarisen riippumattomuuden käsitettä.[5]

Seuraavan lemman muotoilu ja todistus ovat lehtori Heikki Vistin käsialaa. Merkitsemme

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \{\, mx + ny \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\}, \\ S_+(x,y) &= \{\, s \in S(x,y) \mid s > 0 \,\} \quad \text{ja} \\ \sigma(x,y) &= \inf S_+(x,y). \end{aligned}$$

Lemma 4. Luvut x ja y ovat yhteismitalliset, jos ja vain jos $\sigma(x,y) > 0$. Tällöin

(a) $S(x,y) = \{\, k\sigma(x,y) \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$,

(b) $\sigma(x,y)$ on lukujen x ja y yhteinen mitta, ja

(c) $\sigma(x,y)$ on tasan jaollinen kaikilla lukujen x ja y yhteisillä mitoilla.

Todistus. Olkoon δ lukujen x ja y yhteinen mitta, $a, b \in \mathbb{Z}$, $x = a\delta$, $y = b\delta$ ja $s \in S_+(x,y)$. Esitämme luvun s muodossa $s = mx + ny$, missä $m, n \in \mathbb{Z}$. Koska $\delta > 0$ ja $s = (ma + nb)\delta > 0$, välttämättä $ma + nb \geq 1$ ja siis $s \geq \delta$. Näin ollen δ on joukon $S_+(x,y)$ eräs alaraja, ja $\sigma(x,y) \geq \delta > 0$. Näin olemme todistaneet, että lukujen x ja y yhteismitallisuudesta seuraa ehto $\sigma(x,y) > 0$.

Kääntäen: olkoon $\sigma(x,y) > 0$. Valitsemme alkion $s \in S_+(x,y)$, jolle $\sigma(x,y) \leq s < 2\sigma(x,y)$. Tapauksessa $\sigma(x,y) < s$ olisi olemassa $s' \in S_+(x,y)$, jolle $\sigma(x,y) \leq s' < s$. Selvästi $s - s' \in S_+(x,y)$ ja $s - s' < \sigma(x,y)$, mikä on ristiriidassa luvun $\sigma(x,y)$ määritelmän kanssa. Siis $\sigma(x,y) \geq s$, jolloin $\sigma(x,y) = s \in S_+(x,y)$ eli $\sigma(x,y) = \min S_+(x,y)$. Erityisesti $k\sigma(x,y) \in S(x,y)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Siis yhtälössä (a) oikea puoli on vasemman osajoukko. Näytämme vielä, että vasen puoli on oikean osajoukko. Jos olisi $s \in S(x,y)$ ja $k\sigma(x,y) <$

[3] Matemaattisessa mielessä kyseessä on syvällinen asia, ns. *valinta-aksiooma*.

[4] Luku a on reaalilukujoukon A *alaraja*, jos $a \leq x$ kaikilla $x \in A$. Jos joukolla on yksikin alaraja, joukkoa sanotaan *alhaalta rajoitetuksi*. Ns. *täydellisyysaksiooman* nojalla alhaalta rajoitetun epätyhjän joukon alarajojen joukossa on suurin alkio; sitä merkitään $\inf A$.

[5] Itse asiassa kysymys on juuri lineaarisesta riippumattomuudesta, jos $\mathbb{R}$ tulkitaan $\mathbb{Q}$-kertoimiseksi vektoriavaruudeksi ja x sekä y kyseisen avaruuden vektoreiksi.

$s < (k+1)\sigma(x,y)$ eräällä $k \in \mathbb{Z}$, luku $s - k\sigma(x,y)$ olisi aidosti pienempi joukon $S_+(x,y)$ alkio kuin $\sigma(x,y)$, mikä on ristiriita. Siis jokainen joukon $S(x,y)$ alkio on muotoa $k\sigma(x,y)$, $k \in \mathbb{Z}$. Täten (a) on tullut todistetuksi.

Väite (b) seuraa kohdasta (a) ja siitä, että $x, y \in S(x,y)$. Näin olemme todistaneet myös sen, että ehdosta $\sigma(x,y) > 0$ seuraa lukujen x ja y yhteismitallisuus.

Olkoot δ, a ja b kuten todistuksen alussa. Koska $\sigma(x,y) \in S(x,y)$, on olemassa luvut $m, n \in \mathbb{Z}$, joille $\sigma(x,y) = mx + ny = (ma + nb)\delta$. Tässä $ma + nb \in \mathbb{Z}$. Siten myös (c) on voimassa. □

Lemma 5. Olkoot x ja y yhteismitattomia lukuja. Tällöin $mx + ny$ saadaan mielivaltaisen lähelle nollaa valitsemalla kokonaislukukertoimet m ja n, $m \neq 0$ tai $n \neq 0$, sopivasti.

Todistus. Lemman 4 nojalla $\sigma(x,y) = 0$. □

Lemma 6. Jos funktiolla on keskenään yhteismitattomat jaksot, sillä on mielivaltaisen pieniä jaksoja.

Todistus. Olkoot p ja q funktion yhteismitattomat jaksot. Lemman 5 nojalla luku $mp + nq \neq 0$ saadaan mielivaltaisen lähelle nollaa valitsemalla kokonaislukukertoimet m ja n, $m \neq 0$ tai $n \neq 0$, sopivasti. Väite seuraa siitä, että $mp + nq$ on jakso. □

Lause 7. Jos jatkuvalla funktiolla on keskenään yhteismitattomat jaksot, funktio on vakio.

Todistus. Väite on välitön seuraus lauseesta 3 ja lemmasta 6. □

Jaksollisten funktioiden summa

Kahden jaksollisen funktion summa ei välttämättä ole jaksollinen, kuten seuraava esimerkki osoittaa:

Esimerkki 8. Tarkastelkaamme kahta kosinifunktiota

$$f(t) \equiv A\cos\left(\frac{2\pi t}{p} + \alpha\right) \text{ ja } g(t) \equiv B\cos\left(\frac{2\pi t}{q} + \beta\right),$$

joilla on yhteismitattomat perusjaksot p ja q. Jos summalla $(f+g)(t) \equiv f(t) + g(t)$ olisi jakso r, jakson yli otettu integraali olisi välttämättä nolla, sillä kummankin kosinifunktion integraalit yli kaikkien rajoitettujen välien muodostavat rajoitetun joukon. Tällöin nimittäin summan integraalin monikerta

$$\begin{aligned} n\int_t^{t+r} (f(s)+g(s))\,\mathrm{d}s &\equiv \int_t^{t+nr} (f(s)+g(s))\,\mathrm{d}s \\ &\equiv \int_t^{t+nr} f(s)\,\mathrm{d}s + \int_t^{t+nr} g(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

ei voi kasvaa rajatta kokonaisluvun n kasvaessa rajatta. Siis

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \int_t^{t+r} (f(s)+g(s))\,\mathrm{d}s \\ &\equiv \int_t^{t+r} A\cos\left(\frac{2\pi s}{p} + \alpha\right)\mathrm{d}s + \int_t^{t+r} B\cos\left(\frac{2\pi s}{q} + \beta\right)\mathrm{d}s \\ &\equiv \frac{Ap}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi(t+r)}{p} + \alpha\right) - \frac{Ap}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{p} + \alpha\right) \\ &\quad + \frac{Bq}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi(t+r)}{q} + \beta\right) - \frac{Bq}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{q} + \beta\right) \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} &Ap\sin\left(\frac{2\pi t}{p} + \alpha\right) - Ap\sin\left(\frac{2\pi t}{p} + \frac{2\pi r}{p} + \alpha\right) \\ &\equiv Bq\sin\left(\frac{2\pi t}{q} + \frac{2\pi r}{q} + \beta\right) - Bq\sin\left(\frac{2\pi t}{q} + \beta\right). \end{aligned}$$

Yhtälön vasemman puolen eräs jakso on p. Toisaalta myös q on vasemman puolen jakso, sillä q on oikean puolen jakso. Vasemmalla puolella on siis jatkuva funktio, jolla on yhteismitattomat jaksot. Lauseen 7 perusteella vasen puoli on vakiofunktio, mutta se on mahdollista vain tapauksessa

$$\frac{2\pi r}{p} = m \cdot 2\pi \quad \text{eli} \quad r = mp,$$

missä $m \in \mathbb{Z}$. Oikea puoli on vakio vain, jos

$$\frac{2\pi r}{q} = n \cdot 2\pi \quad \text{eli} \quad r = nq,$$

missä $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin $np - mq = 0$, joten yhteismitattomuuden nojalla $n = m = 0$. Siis $r = 0$.

Johtopäätös: Jos kahdella kosinifunktiolla on yhteismitattomat perusjaksot, niiden summa ei ole jaksollinen. Sama koskee luonnollisesti myös sinifunktioita.

Yhteismitallisia perusjaksoja tarkasteltaessa yksiköksi voidaan valita yhteinen mitta. Näin ajatellen tarkastelut voidaan rajoittaa sellaisiin funktioihin, joiden perusjaksot ovat positiivisia kokonaislukuja.

Lemma 9. Olkoon funktiolla f jakso $p \in \mathbb{N}$ ja funktiolla g jakso $q \in \mathbb{N}$. Jos r on tasan jaollinen kummallakin luvuista p ja q, niin r on summan $f + g$ jakso.

Todistus. Olettakaamme, että r on sekä luvun p että luvun q monikerta. Tällöin r on sekä funktion f että funktion g jakso, joten r on summan $f + g$ jakso. □

Jos x ja $y \neq 0$ ovat reaalilukuja, merkitsemme

$$x \bmod y = x - \max\{\, my \mid m \in \mathbb{Z},\ my \leq x \,\}.$$

Kokonaislukujen $m \geq 0$ ja $n > 0$ tapauksessa $m \bmod n$ tarkoittaa siis jakojäännöstä, kun m jaetaan luvulla n. Seuraava esimerkki osoittaa, että epäjatkuvan funktion ei tarvitse olla vakio, vaikka sillä onkin yhteismitattomat jaksot (vrt. lause 7).

Esimerkki 10. Olkoon ξ kiinteä irrationaaliluku. Jaamme reaaliluvut kahdeksi erilliseksi joukoksi sen perusteella, voidaanko ne esittää muodossa

$$m + n\xi, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

vai ei. Jos $m', n' \in \mathbb{Z}$ ja $m + n\xi = m' + n'\xi$, niin $m - m' = (n' - n)\xi$, jolloin luvun ξ irrationaalisuuden perusteella välttämättä $n = n'$ ja $m = m'$. Siis luvun esitys muodossa (2) on yksikäsitteinen. Määrittelemme funktiot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(t) = \begin{cases} m \bmod 3 + n\xi, & t = m + n\xi,\ m, n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{muulloin}, \end{cases}$$

ja

$$g(t) = \begin{cases} m \bmod 2 - n\xi, & t = m + n\xi,\ m, n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{muulloin}. \end{cases}$$

Funktion f eräs jakso on 3. Näytämme, että luku r, $0 < r < 3$, ei voi olla funktion f jakso. Jos $r = m + n\xi$, missä $m, n \in \mathbb{Z}$, niin

$$f(1 + r) = (m + 1) \bmod 3 + n\xi \neq 1 = f(1).$$

Epäyhtälö nähdään välittömästi todeksi tutkimalla tapaukset $n = 0$ ja $n \neq 0$ erikseen. Jos r ei ole muotoa (2), myöskään $1 + r$ ei ole muotoa (2). Tällöin

$$f(1 + r) = 0 \neq 1 = f(1).$$

Siis funktiolla f on perusjakso 3. Samoin funktiolla g on perusjakso 2. On lisäksi ilmeistä, että summalla $f + g$ on jakso ξ. Lemman 9 nojalla summalla on myös jakson ξ kanssa yhteismitaton jakso $2 \cdot 3 = 6$. Lemman 6 mukaan funktiolla $f + g$ on tällöin mielivaltaisen pieniä jaksoja.

Johtopäätös: Vaikka kummallakin kahdesta funktiosta on perusjaksona kokonaisluku, funktioiden summalla voi olla ääretön määrä mielivaltaisen pieniä irrationaalisia jaksoja.

Lause 11. Olkoon funktiolla f perusjakso $p \in \mathbb{N}$ ja funktiolla g perusjakso $q \in \mathbb{N}$, missä lukujen p ja q suurin yhteinen tekijä on $\operatorname{syt}(p, q) = 1$. Jos $r = m/n$ on summan $f + g$ jakso, missä $m \in \mathbb{N}$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin m on jaollinen tulolla pq.

Todistus. Yhtälöstä

$$f(t + knr) + g(t + knr) \equiv f(t) + g(t)$$

saadaan kertoimella $k = q$

$$f(t + qm) \equiv f(t) \tag{3}$$

ja kertoimella $k = p$

$$g(t + pm) \equiv g(t). \tag{4}$$

Yhtälö (3) toteutuu vain, jos m on jaollinen luvulla p, sillä muulloin funktiolla f olisi jaksoa p lyhyempi positiivinen jakso $qm \bmod p$. Samoin (4) toteutuu vain, jos m on jaollinen luvulla q. □

Korollaari 12. Olkoon funktiolla f perusjakso $p \in \mathbb{N}$ ja funktiolla g perusjakso $q \in \mathbb{N}$, missä $\operatorname{syt}(p, q) = 1$. Jos $n \in \mathbb{N}$ ja pq/n on summan $f + g$ jakso, niin $\operatorname{syt}(pq, n) = 1$.

Esimerkki yhteismitallisista jaksoista

Korollaarin 12 innoittamina konstruimme esimerkin tapauksesta, jossa funktiolla f on perusjakso 3, funktiolla g on perusjakso 2, ja summalla $f + g$ on perusjakso $6/5$. Rakennamme esimerkin epäjatkuvista funktioista määrittelemällä niiden arvot nollaksi muualla paitsi pisteissä $n/5$, $n \in \mathbb{Z}$. Koska jokaisella funktioista f, g ja $f + g$ on jaksona 6, voimme rajoittaa tarkastelut funktioiden arvoihin pisteissä $n/5$, $0 \leq n < 30$. Lopuksi muutamme epäjatkuvat funktiot jatkuviksi operaatiolla, jota matemaatikot nimittävät konvoluutioksi; siinä jaksollisuusominaisuudet säilyvät.

Merkitsemme lyhyyden vuoksi

$$\begin{aligned} f_n &= f(n/5), \quad n = 0, 1, \ldots, 14, \\ g_n &= g(n/5), \quad n = 0, 1, \ldots, 9, \\ S_n &= (f + g)(n/5), \quad n = 0, 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Funktiolla $f+g$ on jaksona $6/5$, jos ja vain jos seuraavat yhtälöt ovat voimassa yht'aikaa:

$$\begin{aligned} S_0 &= f_0 + g_0 = f_6 + g_6 = f_{12} + g_2 && (5) \\ &= f_3 + g_8 = f_9 + g_4, \\ S_1 &= f_1 + g_1 = f_7 + g_7 = f_{13} + g_3 && (6) \\ &= f_4 + g_9 = f_{10} + g_5, \\ S_2 &= f_2 + g_2 = f_8 + g_8 = f_{14} + g_4 && (7) \\ &= f_5 + g_0 = f_{11} + g_6, \\ S_3 &= f_3 + g_3 = f_9 + g_9 = f_0 + g_5 && (8) \\ &= f_6 + g_1 = f_{12} + g_7, \\ S_4 &= f_4 + g_4 = f_{10} + g_0 = f_1 + g_6 && (9) \\ &= f_7 + g_2 = f_{13} + g_8, \\ S_5 &= f_5 + g_5 = f_{11} + g_1 = f_2 + g_7 && (10) \\ &= f_8 + g_3 = f_{14} + g_9. \end{aligned}$$

Kun yhtälöistä (5) ja (6) ratkaistaan $g_0, \ldots, g_9$ ja sijoitetaan yhtälöihin (7)–(10), saadaan

$$\begin{aligned} S_2 &= f_2 + S_0 - f_{12} = f_8 + S_0 - f_3 && (11)\\ &= f_{14} + S_0 - f_9 = f_5 + S_0 - f_0 \\ &= f_{11} + S_0 - f_6, \\ S_3 &= f_3 + S_1 - f_{13} = f_9 + S_1 - f_4 && (12)\\ &= f_0 + S_1 - f_{10} = f_6 + S_1 - f_1 \\ &= f_{12} + S_1 - f_7, \\ S_4 &= f_4 + S_0 - f_9 = f_{10} + S_0 - f_0 && (13)\\ &= f_1 + S_0 - f_6 = f_7 + S_0 - f_{12} \\ &= f_{13} + S_0 - f_3, \\ S_5 &= f_5 + S_1 - f_{10} = f_{11} + S_1 - f_1 && (14)\\ &= f_2 + S_1 - f_7 = f_8 + S_1 - f_{13} \\ &= f_{14} + S_1 - f_4. \end{aligned}$$

Yhtälöistä (11) ratkeavat

$$\begin{aligned} f_0 &= f_5 + S_0 - S_2, && (15)\\ f_3 &= f_8 + S_0 - S_2, && (16)\\ f_6 &= f_{11} + S_0 - S_2, && (17)\\ f_9 &= f_{14} + S_0 - S_2, && (18)\\ f_{12} &= f_2 + S_0 - S_2, && (19) \end{aligned}$$

ja yhtälöistä (14) ratkeavat

$$\begin{aligned} f_2 &= f_7 + S_5 - S_1, && (20)\\ f_5 &= f_{10} + S_5 - S_1, && (21)\\ f_8 &= f_{13} + S_5 - S_1, && (22)\\ f_{11} &= f_1 + S_5 - S_1, && (23)\\ f_{14} &= f_4 + S_5 - S_1. && (24) \end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä yhtälöihin (12)–(13) saadaan

$$\begin{aligned} S_3 &= S_0 - S_2 + S_5, && (25)\\ S_4 &= S_1 + S_2 - S_5. && (26) \end{aligned}$$

Johtopäätös: Jos vakiot $S_0, \ldots, S_5$ toteuttavat ehdot (25) ja (26), yhtälöryhmällä (5)–(10) on äärettömän monta ratkaisua. Ne saadaan valitsemalla vapaasti arvot muuttujille f_1, f_4, f_7, f_{10}, f_{13} ja laskemalla muuttujille f_2, f_5, f_8, f_{11}, f_{14} arvot kaavoista (20)–(24). Tämän jälkeen muuttujille f_0, f_3, f_6, f_9, f_{12} lasketaan arvot kaavoista (15)–(19) ja muuttujille $g_0, \ldots, g_9$ yhtälöistä (5) ja (6). Jos vakiot $S_0, \ldots, S_5$ eivät toteuta ehtoja (25) ja (26), yhtälöryhmällä (5)–(10) ei ole yhtään ratkaisua.

Ehtojen (25) ja (26) toteutuessa ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} f_0 &= f_{10} - S_1 + S_3, & g_0 &= S_4 - f_{10},\\ f_2 &= f_7 - S_1 + S_5, & g_1 &= S_1 - f_1,\\ f_3 &= f_{13} - S_1 + S_3, & g_2 &= S_4 - f_7,\\ f_5 &= f_{10} - S_1 + S_5, & g_3 &= S_1 - f_{13},\\ f_6 &= f_1 - S_1 + S_3, & g_4 &= S_4 - f_4,\\ f_8 &= f_{13} - S_1 + S_5, & g_5 &= S_1 - f_{10},\\ f_9 &= f_4 - S_1 + S_3, & g_6 &= S_4 - f_1,\\ f_{11} &= f_1 - S_1 + S_5, & g_7 &= S_1 - f_7,\\ f_{12} &= f_7 - S_1 + S_3, & g_8 &= S_4 - f_{13},\\ f_{14} &= f_4 - S_1 + S_5, & g_9 &= S_1 - f_4. \end{aligned}$$

Esimerkki 13. Valitsemalla $S_0 = S_1 = S_2 = 0$, $S_3 = S_5 = 1$ ja $S_4 = -1$ ehdot (25) ja (26) toteutuvat. Asetamme $f_1 = 1$ ja $f_4 = f_7 = f_{10} = f_{13} = 0$. Silloin $f_0 = f_2 = f_3 = f_5 = f_8 = f_9 = f_{12} = f_{14} = 1$, $f_6 = f_{11} = 2$, $g_0 = g_1 = g_2 = g_4 = g_8 = -1$, $g_3 = g_5 = g_7 = g_9 = 0$ ja $g_6 = -2$. Funktioiden f, g ja $f + g$ arvoista saadaan seuraava taulukko:

t	$f(t)$	$g(t)$	$f(t)+g(t)$
0,0	1	-1	0
0,2	1	-1	0
0,4	1	-1	0
0,6	1	0	1
0,8	0	-1	-1
1,0	1	0	1
1,2	2	-2	0
1,4	0	0	0
1,6	1	-1	0
1,8	1	0	1
2,0	0	-1	-1
2,2	2	-1	1
2,4	1	-1	0
2,6	0	0	0
2,8	1	-1	0
3,0	1	0	1
3,2	1	-2	-1
3,4	1	0	1
3,6	1	-1	0
3,8	0	0	0
4,0	1	-1	0
4,2	2	-1	1
4,4	0	-1	-1
4,6	1	0	1
4,8	1	-1	0
5,0	0	0	0
5,2	2	-2	0
5,4	1	0	1
5,6	0	-1	-1
5,8	1	0	1

Taulukkoa ajatellaan jatkettavan jaksollisesti arvoille $t = n/5$, $n \in \mathbb{Z}$, missä $n < 0$ ja $30 \leq n$. Jos t ei ole muotoa $n/5$, $n \in \mathbb{Z}$, funktioiden arvot pisteessä t asetetaan nolliksi. Silloin funktion f perusjakso on 3, funktion g perusjakso on 2, ja funktion $f + g$ perusjakso on 6/5.

Esimerkki 14. Muokkaamme esimerkin 13 muotoon, jossa esiintyy vain jatkuvia funktioita, tai itse asiassa ns. C^∞-funktioita eli sellaisia funktioita, joilla on kaikkien kertalukujen derivaatat. Käytämme rakennuspalikkana funktiosta

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} e^{t^2/(t^2-1)}, & -1 < t < 1, \\ 0, & \text{muulloin}, \end{cases}$$

skaalaamalla saatavia funktioita $\psi_a(t) = \psi(t/a)$, $a > 0$. Kuvaus ψ_a on nolla välin $]-a, a[$ ulkopuolella, se on aidosti vähenevä välillä [0,a[, $\psi(0) = 1$ ja $\psi_a(-t) = \psi_a(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Lisäksi funktiolla ψ_a on kaikkien kertalukujen derivaatat kaikissa lukusuoran pisteissä. Derivoituvuus pisteissä $-a$ ja a seuraa siitä, että eksponenttifunktio $t \mapsto e^t$ voittaa kasvussa kaikki polynomifunktiot, kun t kasvaa rajatta. Siirtämällä funktiota $\psi_{0,1}$ luvun $n/5$ verran saadaan kuvaukset

$$\theta_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \theta(t) = \psi_{0,1}(t - n/5), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Funktio θ_n on nolla välin $]\,n/5 - 1/10\,,\, n/5 + 1/10\,[$ ulkopuolella. Korvaamalla esimerkissä 13 funktio f funktiolla

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/5)\,\theta_n(t),$$

ja funktio g funktiolla

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n/5)\,\theta_n(t),$$

saamme C^∞-kuvaukset F, G ja $F + G$, joilla on samat jaksollisuusominaisuudet kuin funktioilla f, g ja $f + g$.

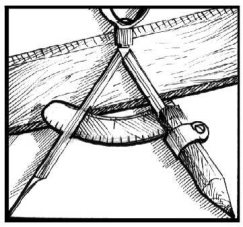
Lopuksi

Keksitkö itse mielenkiintoisia jaksollisiin funktioihin liittyviä ilmiöitä? Voidaanko esimerkki 8 yleistää muillekin kuin trigonometrisille funktioille? Onko olemassa funktioita f ja g, joista ensimmäisen perusjakso on 2, toisen perusjakso on 3 ja summan $f + g$ perusjakso on 6/7? Entä muut tapaukset, joita korollaari 12 ei sulje pois? Älä turhaudu! Ratkaisujen keksiminen voi olla hyvinkin hankalaa, eikä niihin kannata liikaa tuhlata aikaansa. Mikä sitten on liikaa – no jaa, riippuu kiinnostuksen määrästä. Itse käytin tämän jutun kirjoittamiseen puolet hiihtolomastani. Aikaisemmin olin miettinyt näitä asioita aina silloin tällöin muutamien kuukausien kuluessa.

Jos jokin käsite tai muu asia jäi hämäräksi, Tampereen teknillisen yliopiston verkkodokumentti *Johdatus korkeakoulumatematiikkaan* osoitteessa

`http://matwww.ee.tut.fi/jkkm/toc.html`

saattaa olla avuksi, vaikka periaatteessa lukion pitkän matematiikan pitäisi riittää.



Solmun tehtäviä

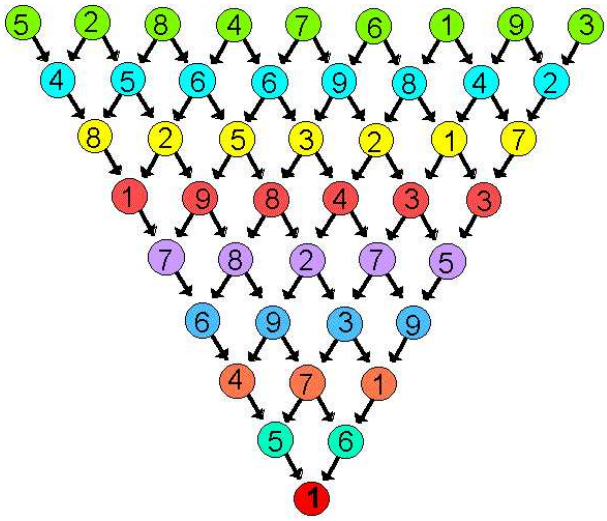
Solmun tämänkertaiset tehtävät ovat vaatimustasoltaan peruskoulun alaluokille ja matematiikan alkuopetukseen sopivia. Tehtävät liittyvät lukuihin, laskemiseen ja järjestykseen. Tehtävien ohessa on muutamia vihjeitä ja didaktisia huomautuksia. Myös tehtävien ratkaisut esitetään heti kysymyksen sekä mahdollisen vihjeen tai huomautuksen jälkeen.

1. Kuinka monta päivää oli helmikuun 25. ja maaliskuun 11. päivän välissä vuonna 2004?

Huomautus. Lapsille tämä tehtävä ei ole niin itsestään selvä kuin aluksi saattaa tuntua. Kuukausien nimien ja järjestyksen sekä niiden päivien lukumäärien käsittely samassa yhteydessä voi auttaa lapsia tehtävän ratkaisemisessa. Rohkaiskaa lapsia keskustelemaan pienissä ryhmissä tehtävästä, jonka jälkeen ryhmät esittävät, mitä ratkaisu voisi olla. Antakaa lapsille seuraavaksi vuoden 2004 kalenteri tutkittavaksi. Keskustelu voi kääntyä sanan ”välissä” merkityksen pohtimiseksi. Pitäisikö mukaan laskea myös ensimmäinen ja viimeinen päivä? Helpottaako ratkaisemista tieto siitä, että ensimmäinen päivä on keskiviikko ja viimeinen päivä on torstai? Lisäksi pitää ottaa huomioon, että vuosi 2004 oli karkausvuosi, joten tuolloin helmikuussa oli 29 päivää. Kun tehtävän käsittely on saatu päätökseen, niin lapsia voi pyytää esittämään omia vastaavia tehtäviä toisten ratkaistaviksi.

Ratkaisu. Emme voi laskea päiviin mukaan helmikuun 25. päivää emmekä maaliskuun 11. päivää, koska kysymyksessä mainitaan sana ”välissä”. Helmikuun 26. päivästä 29. päivään (29. päivä mukaanluettuna) on yhteensä 4 päivää. Vuosi 2004 oli karkausvuosi, joten helmikuussa oli 29 päivää. Maaliskuun 1. päivästä 11. päivään (11. päivää ei lasketa mukaan) on 10 päivää. Näin ollen päivien lukumäärien summa on $4 + 10 = 14$.

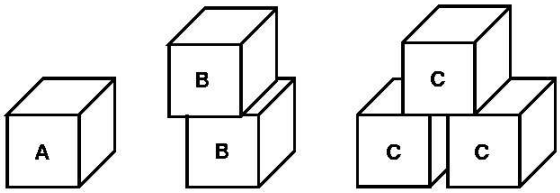
2. Löydätkö sellaisen polun jostakin ylärivin luvusta alarivin lukuun, joka kulkee jokaisen luvun 1–9 kautta kerran ja vain kerran?



Vihje. Tee kuvasta kopio ja rastita yli kaikki ne ylärivin luvut, joista et voi aloittaa.

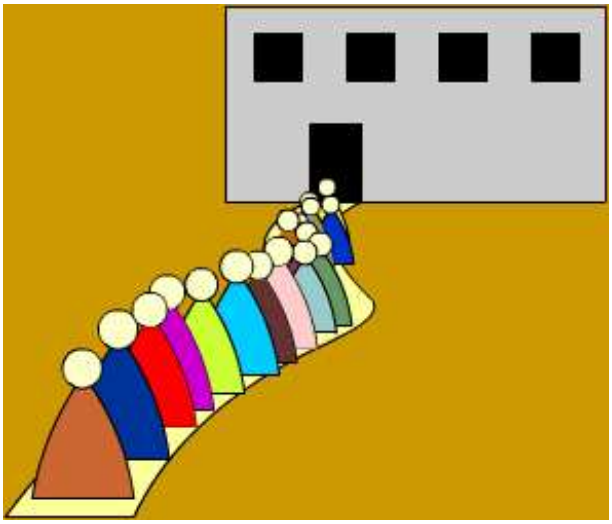
Ratkaisu. Oikeaksi vastaukseksi löytyy kaksi erilaista tapaa kulkea lukujen läpi. Ensimmäinen ratkaisu on luvut järjestyksessä $7, 6, 3, 8, 2, 9, 4, 5, 1$ ylhäältä alas. Toinen ratkaisu on luvut järjestyksessä $4, 6, 3, 8, 2, 9, 7, 5, 1$ ylhäältä alas.

3. Joulupukin pajassa tontut maalaavat kiireisinä kirjaimia kuutioihin. He tekevät sen erityisellä tavalla maalaamalla A:n yhteen kuutioon, B:n kahteen kuutioon, C:n kolmeen kuutioon, jne. Kuinka monta kuutiota he ovat maalanneet saatuaan maalattua F:n?



Ratkaisu. A…1 kuutio, B…2 kuutiota, C…3 kuutiota, D…4 kuutiota, E…5 kuutiota ja F…6 kuutiota, yhteensä $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ kuutiota.

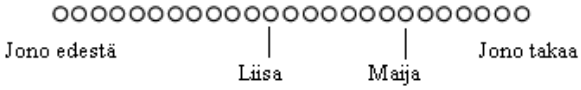
4. Jonossa on 25 oppilasta. Maija on jonossa 19. alusta laskien ja Liisa on jonossa 14. lopusta laskien. Kuinka monta oppilasta on Maijan ja Liisan välissä?



Vihje. Yritä ratkaista tehtävä käyttämällä oppilaina kuutioita tai muita esineitä. Toinen tapa päästä alkuun on pohtia kuinka monta oppilasta on Liisan edessä.

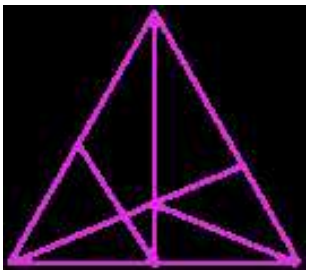
Ratkaisu. Vastaus on 6 oppilasta. Numeroidaan jokainen oppilas, numero 1 on jonon ensimmäinen (alusta lukien) ja numero 25 on jonon viimeinen oppilas. Maija on selvästi oppilas numero 19. Lasketaan taaksepäin 25:stä 14. paikkaan jonossa (aloittamalla 25:stä ratkaisu tulee olemaan oikea). Näin laskien Liisa on numero 12. Sitten lasketaan luvut numeroiden 12 ja 19 välissä, ja tulokseksi saadaan 6.

Toinen ratkaisu saadaan piirtämällä tilanteesta kuva:

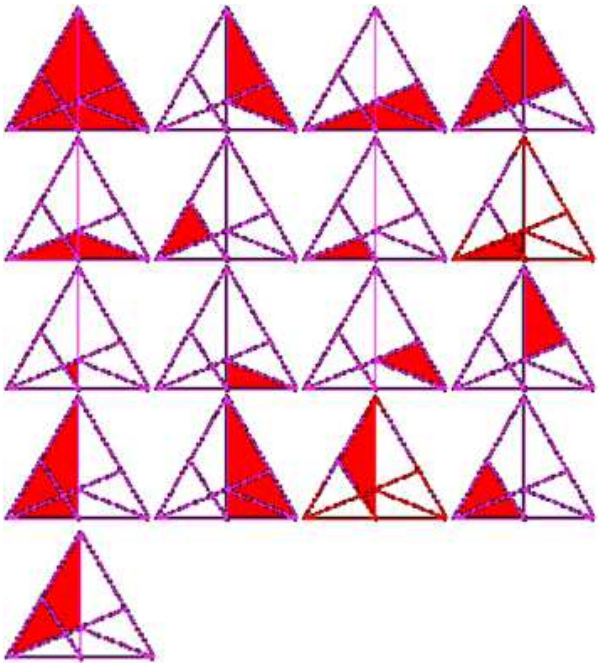


Kuvassa on 25 oppilasta jonossa. Koska Maija on jonon 19. oppilas edestä laskien ja Liisa on jonon 14. oppilas takaa laskien, niin Maijan ja Liisan välissä on 6 oppilasta.

5. Kuinka monta kolmiota löydät alla olevasta kuviosta? Katso huolellisesti, osa kolmioista on piilossa!



Ratkaisu. Kuviosta löytyy 17 kolmiota. Ne on esitetty seuraavassa kuvassa:



Lähde: *NRICH*, University of Cambridge, `http://nrich.maths.org`.

Numeerista lineaarialgebraa Python-kielellä

Antti Rasila
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Johdanto

Tämä kirjoitus on jatkoa kahdelle aikaisemmalle Solmussa ilmestyneelle kirjoitukselleni matemaattisesta ohjelmoinnista Python-kielellä. Tässä kirjoituksessa käsitellään menetelmiä ja ongelmia, jotka esiintyvät suunnilleen ensimmäisen vuoden yliopistokursseilla. Ohjelmoinnin perusteita ei käsitellä, niiden osalta viittaan aikaisempiin kirjoituksiin. Kuten sarjan edellisessäkin artikkelissa, tässä kirjoituksessa pyritään lähestymään matemaattisia ongelmia ohjelmoijan näkökulmasta. Taustalla on myös ajatus, että ohjelmointitaitoja voi käyttää hyväksi matemaattisten ideoiden omaksumisessa.

Tässä osassa tutkittavat ongelmat liittyvät lineaarialgebran perusteisiin. Tällä nimellä aihetta ei koulukursseissa käsitellä, mutta aihe sivuaa vektorilaskentaa ja ensimmäisen asteen yhtälöryhmien ratkaisemista. Lineaarialgebralla on paljon käytännöllisiä ja teoreettisia sovelluksia mm. tilastotieteeseen, teknillisiin tieteisiin ja useille matematiikan erityisaloille. Yliopistossa opiskelleet muistavat opiskeluajoiltaan lineaarialgebran peruskurssin työläänä laskemispainotteisena kurssina, jossa tehtäviä on paljon ja teoriaa suhteellisen vähän. Tässä kirjoituksessa esitetään vain keskeiset ideat ja annetaan koneen hoitaa laskeminen. On hyvä kuitenkin muistaa, että koneet eivät pysty korvaamaan asioiden ymmärtämistä. Asioiden ymmärtäminen puolestaan vaatii aina harjoittelua, joka voi olla esimerkiksi käsin laskemista tai tietokoneohjelmien kirjoittamista.

Numerical Python -laajennus tuo Python-kieleen mukaan laskennallisesti tehokkaita numeeriseen lineaarialgebraan liittyviä algoritmeja. Numerical Python on vapaa ohjelmisto ja sen voi ladata ilmaiseksi www-sivulta `http://sourceforge.net/projects/numpy`. Helposti asennettava Python-paketti, jossa myös Scientific Python ja Numerical Python -laajennukset ovat valmiiksi mukana, on ladattavissa ilmaiseksi www-sivulta `http://www.enthought.com/`.

Tehokkuuden parantamiseen käytetään tekniikkaa, jota kutsutaan vektoroinniksi. Vektoroinnin perusideana on, että samankaltainen operaatio halutaan suorittaa samalla kertaa suurelle määrälle alkeistapauksia. Nämä alkeistapaukset esitetään yksi- tai usempiulotteisena taulukkona. Vektorointi parantaa ohjelman suoritusaikoja kahdella tavalla:

1. Ohjelmointikielen tulkkia ei tarvitse kutsua eri operaatioiden välillä, eli tulkin aiheuttama hitaus jakautuu useille suoritettaville operaatioille. Tätä ideaa käytettävät esimerkiksi Numerical Python ja MATLAB.

2. Datavektorin eri alkioiden välillä ei ole riippuvuuksia, joten vektoroidut laskutoimitukset voidaan suorittaa rinnakkain. Tämä voidaan toteuttaa joko nopeana sarjatyöskentelynä (nk. vektoriprosessorit) tai jakamalla tehtävä useille eri prosessoreille. Nämä tekniikat ovat yleisiä supertietokoneissa ja leviämässä myös kotitietokoneisiin (esim. SSE2 ja Altivec).

Vektorointi tarjoaa mm. numeeriseen lineaarialgebraan sopivia toimintoja, mutta laskennassa esiintyviä vektoreita ei pidä sekottaa matemaattisiin vektoreihin. Niillä tehtävät laskutoimitukset tarkoittavat elementeittäin suoritettavia skalaarien laskutoimituksia. Ohjelmoinnin helpottamiseksi vektoreille voi yleensä suorittaa myös joitakin muita operaatioita, joista tavallisimpia ovat maksimi, minimi ja elementtien summa.

Esimerkkejä. Oletetaan, että $n \geq 1$ ja $\bar{x} = [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$ ja $\bar{y} = [y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n]$ ovat n:n mittaisia vektoreja (Python-mielessä). Tällöin

$$\begin{aligned}
\bar{x}^2 &= [x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots, x_n^2], \\
\sin(\bar{x}) &= [\sin(x_1), \sin(x_2), \sin(x_3), \ldots, \sin(x_n)], \\
\bar{x} * \bar{y} &= [x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, \ldots, x_n y_n], \\
\bar{x} + \bar{y} &= [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n].
\end{aligned}$$

Huomaa, että ylläolevista laskutoimituksista ainoastaan $\bar{x} + \bar{y}$ on järkevä myös matemaattisten vektorien laskutoimituksena.

Numerical Python -kirjasto

Numerical Pythonin (Numeric) tarkoituksena on tarjota kaupallista MATLAB-ohjelmistoa vastaava vapaa avoimen lähdekoodin ohjelmointiympäristö numeerisen matematiikan sovelluksille. Erityisesti Numerical Python -kirjastossa on toteutettu nopeat vektoroidut laskutoimitukset, jotka pienentävät käännetyllä ohjelmointikiellä (esimerkiksi C, C++ tai Fortran) saatavaa tehokkuusetua Pythoniin nähden. Vektoroitujen skalaarilaskutoimitusten lisäksi kirjastosta löytyy perusalgoritmeja lineaarialgebraan, jotka on sisällytetty erilliseen *LinearAlgebra*-pakettiin. Vaikka Numerical Python onkin melko monipuolinen ohjelmointikirjasto, kaikkia MATLAB-kielen ominaisuuksia ei siinä ole toteutettu, esimerkiksi kuvien piirtoon ja käsittelyyn ei tarjota mitään. Puuttuvia piirteitä on toteutettu mm. *Scientific Python*-laajennuksessa sekä visualisointikirjastossa *MatPlotLib*. Suhteellisen hyvän tehokkuuden ja vapaan levitettävyyden lisäksi tämän ympäristön tekee opetuskäytössä houkuttelevaksi Python-ohjelmointikielen sopivuus ensimmäiseksi ohjelmointikieleksi ohjelmoinnin alkeisopetuksessa.

Seuraavassa esimerkkejä vektoroiduista sklaarilaskutoimituksista Numerical Pythonia käyttäen. Risuaidalla merkityt rivit ovat kommentteja, eikä niitä tarvitse kirjoittaa.

```
# ladataan Numerical Python -kirjasto
>>> from Numeric import *
# käsky arange(a,b) tuottaa vektoriin
>>> x=arange(1.0,5.0)
# luvut a:sta b:hen
# vektoreita voidaan alustaa myös näin
>>> y=array([0,1,0,1])
>>> x                        # tulostetaan x
array([ 1.,  2.,  3.,  4.])
>>> y
array([0, 1, 0, 1])
>>> x*y                      # x:n ja y:n tulo
array([ 0.,  2.,  0.,  4.])
>>> x**y # vektoroitu poteenssinkorotus
array([ 1.,  2.,  1.,  4.]) # x potenssiin y
# vektoroituja laskutoimituksia
>>> sin(x)
array([ 0.84147,  0.90929,  0.14112, -0.75680])
>>> sin(x)+cos(x)
array([ 1.38177,  0.49315, -0.84887, -1.41044])
```

Matriisit ja lineaariset yhtälöryhmät

Tässä luvussa esitetään lyhyt johdatus matriiseihin ja lineaarisiin yhtälöryhmiin. Tarkastellaan aluksi seuraavaa yhtälöryhmää:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{cases} \tag{1}$$

Tässä a_{ij}:t ja b_i:t ovat vakioita ja x_1, x_2 ovat muuttujia. Tällaista yhtälöryhmää kutsutaan lineaariseksi yhtälöryhmäksi.

Huomataan, että yhtälöryhmässä esiintyvät kertoimet a_{ij} määrittevät funktion eli kuvauksen, joka kuvaa vektorin (x_1, x_2) vektorille (b_1, b_2). Merkitään tätä kuvausta kirjaimella A ja huomataan, että $A\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Sovitaan, että jatkossa ylläolevaa yhtälöryhmää tarkoitettassa kirjoitetaan $A(x) = b$. Kun halutaan kertoa, että kertoimet a_{ij} määrittelevät kuvauksen A, kirjoitetaan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Tätä esitystä nimitetään 2×2-matriisiksi. Samalla tavoin voidaan määritellä $m \times n$-matriiseja. Jos $n = m$, kutsutaan matriisia neliömatriisiksi. Vektorit tulkitaan lineaarialgebrassa tavallisesti $n \times 1$-matriiseksi.

Jos A, B ovat $m \times n$-matriiseja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

määritellään matriisien summa

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Jos A on $m \times p$-matriisi ja B on $p \times n$-matriisi, niin matriisien A ja B tulo määritellään kaavalla

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \sum_1^p a_{1k}b_{k1} & \sum_1^p a_{1k}b_{k2} & \dots & \sum_1^p a_{1k}b_{kn} \\ \sum_1^p a_{2k}b_{k1} & \sum_1^p a_{2k}b_{k2} & \dots & \sum_1^p a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_1^p a_{mk}b_{k1} & \sum_1^p a_{mk}b_{k2} & \dots & \sum_1^p a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix}.$$

Matriisin kertominen reaaliluvulla t määritellään $tA = (ta_{ij})$. Matriisien A ja B tulo AB vastaa yhdistettyä kuvausta $A \circ B$. Ylläolevan kaavan voi siis johtaa laskemalla lausekkeen yhdistetylle kuvaukselle. Lineaarinen yhtälöryhmä (1) voidaan kirjoittaa myös matriisitulon avulla muotoon $Ax = b$, missä x on 2×1-matriisi.

Neliömatriisin A käänteismatriisi A^{-1} on sellainen matriisi, että $AA^{-1} = I$. Tässä I on yksikkömatriisi

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

Käänteismatriisi A^{-1} vastaa A:n käänteiskuvausta (jos sellainen on olemassa), ja yksikkömatriisi vastaa identtistä kuvausta. Erityisesti, jos $Ax = y$ niin $A^{-1}y = x$. Matriisilla A on käänteismatriisi jos ja vain jos A:n determinantti $\det A \neq 0$. Jos A on 2×2-matriisi, niin

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen

Matriisin lineaaristen yhtälöryhmien käsittelemiseen Numerical Python tarjoaa kirjaston LinearAlgebra. Ohessa esimerkkejä kirjaston käytöstä matriiseilla laskemiseen.

```
>>> from Numeric import *
>>> from LinearAlgebra import *
>>> A=array([[1,2],[3,4]])
>>> A
array([[1, 2],
       [3, 4]])
>>> b=array([5,6])
>>> iA=inverse(A)
>>> iA
array([[-2. ,  1. ],
       [ 1.5, -0.5]])
>>> matrixmultiply(A,iA)
array([[  1.00000000e-00,   1.11022302e-16],
       [ -2.22044605e-16,   1.00000000e+00]])
>>> matrixmultiply(iA,b)
array([-4. ,  4.5])
```

LinearAlgebra-kirjastosta löytyy valmiita algoritmeja lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseen ja käänteismatriisin laskemiseen. Seuraavaksi käydään läpi eräs tapa, joka on helppo ymmärtää, mutta ei laskennallisesti tehokas.

Kuten edellä 2×2-matriisin tapauksessa todettiin, yhtälöryhmä (1) voidaan kirjoittaa muotoon $Ax = b$. Samoin voidaan menetellä tapauksessa, jossa A on $n \times n$-matriisi. Seuraavaksi tarkastelemme tällaisen yleisen tapauksen tärkeää erikoistapausta, jossa matriisilla A on erityinen muoto, sen *diagonaalin* alapuoliset alkiot ovat nollia. Matriisia U sanotaan yläkolmiomatriisiksi, jos se on muotoa

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix},$$

missä kaikki diagonaalin alapuoliset alkiot ovat nollia[6]. Jos U on yläkolmiomatriisi, lineaarinen yhtälöryhmä $Ux = b$ voidaan ratkaista seuraavasti:

1. Huomataan, että itseasiassa alin yhtälö on jo melkein ratkaistu. Sen ratkaisu on $x_n = b_n/u_{nn}$.
2. Sijoitetaan saatu x_n:n arvo muihin yhtälöihin ja muuttuja x_i. Ratkaisu saadaan kaavasta

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\Big[b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\Big], \text{ kun } k = n-1, \dots, 2, 1.$$

Seuraavaksi esitetään tapa, jolla lineaarinen yhtälöryhmä $Ax = b$ ($\det A \neq 0$) voidaan palauttaa sellaiseksi, jossa esiintyy yläkolmiomatriisi U, eli $Ux = \tilde{b}$. Tätä menettelyä kutsutaan Gaussin eliminoinniksi.

1. Lähdetään liikkeelle yhtälöryhmän ylimmältä riviltä. Kerrotaan ylin rivi luvulla $c_1 = -a_{21}/a_{11}$ ja lasketaan tulos yhteen toiseksi ylimmän kanssa, jolloin muuttujan x_1 kerroin häviää. Sijoitetaan lopputulos toiseksi ylimmän rivin paikalle. Jos $a_{11} = 0$, rivien järjestystä pitää vaihtaa.

[6] Vastaavasti matriisia, jossa diagonaalin yläpuoliset alkiot ovat nollia, sanotaan alakolmiomatriisiksi.

2. Toistetaan sama menettely vakiolla $c_2 = -a_{31}/a_{11}$ kolmannella rivillä, jolloin x_1:hden kerroin häviää myös kolmannelta riviltä.
3. Edelleen toistetaan menettely lopuilla riveillä, ja saadaan yhtälöryhmä, jossa x_1:hden kerroin on nolla kaikilla muilla riveillä paitsi ensimmäisellä.
4. Aloitetaan toiselta riviltä. Menetellen kuten edellä, hävitetään muuttujan x_2 kertoimet riveiltä 3-n.

Lopputuloksena siis on yhtälöryhmä, joka on muotoa $Ux = \tilde{b}$.

Gaussin eliminointi on työlästä laskea käsin, mutta tietokoneella se sujuu helposti. Lopputuloksena saatava yhtälöryhmä voidaan edelleen ratkaista kuten yllä. Käytännössä lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen kannattaa tehdä LinearAlgebra-paketin valmiilla algoritmeilla.

```
>>> solve_linear_equations(A,b)
array([-4. ,  4.5])
```

Muita paketistä löytyviä hyödyllisiä käskyjä ovat mm. matriisin a determinantti `determinant(a)` ja käänteismatriisi `inverse(a)`.

Linkkejä ja lisämateriaalia

- Python-ohjelmointikielen kotisivu (Pythonin voi ladata täältä): `http://www.python.org/`
- Ohjelmoinnin peruskurssi Pythonilla (lukiotasoinen ohjelmointikurssi): `http://www.cs.helsinki.fi/u/vahakota/aott/index.html`
- Numerical Pythonin kotisivu: `http://sourceforge.net/projects/numpy`
- SciPy – Scientific tools for Python: `http://www.scipy.org/`
- Python Tutorial: `http://www.python.org/doc/current/tut/tut.html`
- Dive Into Python: Python from novice to pro (verkosta ladattava kirja): `http://www.diveintopython.org/`
- (Yliopistotaisoisen) kurssin ”Lineaarialgebra ja matriisilaskenta” luentomoniste: `http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/info/lineaarialgebra_ja_matriisilaskenta04s.html`
- Virtuaalista lineaarialgebran oppimateriaalia (mm. harjoitustehtäviä): `http://www.it.lut.fi/mat/virtuaali/matb/list.html?root=382`
- Professor Strang’s Linear Algebra Lecture Videos (englanninkielinen videokurssi, MIT OpenCourseWare): `http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Mathematics/18-06Linear-AlgebraFall2002/VideoLectures/index.htm`

Tehtäviä alakoululaisille 1950-luvulta

Tällaisia tehtäviä laskettiin 1950-luvulla kansakoulun neljännellä luokalla, joka vastaa nykyisen peruskoulun neljättä luokkaa. Näiden harjoitusten jälkeen piti samana keväänä pyrkiä oppikouluun. Tehtävät ovat oppikoulujen pääsytutkinnoissa hakijoiden ratkaistaviksi annettuja koetehtäviä (Saarialho, K. & Myrsky, V. (1950). Laskutaito ja elämä. Laskennon ja mittausopin oppikirja maaseudun kansakouluille. B-laitos. Kolmas ja neljäs kouluvuosi. Porvoo: WSOY). Tehtävät ratkaistiin ilman laskinta.

1. Mitä saadaan, jos neljänkymmenentuhannenkuudensadankuudenkymmenen ja kolmenkymmenenkahdeksan osamäärä kerrotaan seitsemällä?

2. Pekka ja Heikki kilpailivat keihäänheitossa. Pekan heitolla keihäs tuli maahan 2 metriä 5 senttimetriä ennen heittopaikasta 20 metrin päähän merkittyä viivaa. Heikki voitti kilpailun, sillä hänen heittonsa oli 5 metriä 8 senttimetriä pitempi kuin Pekan. Kuinka pitkä Heikin heitto oli?

3. Perheen maitoannos on 1 litra 2 desilitraa päivässä. Kerran matkalta palattuaan perhe teki maitotilauksen koko matkan ajalta ja sai siten yhdellä kerralla 6 litraa. Kuinka monen päivän maitoannos tässä oli?

4. Marjat maksavat 50 markkaa kilolta. Mitä silloin samat marjat maksavat litralta, jos marjalitra painaa 900 grammaa?

5. Pojat pääsivät huvilalta kaupunkiin moottoriveneellä, joka kulki 12 kilometriä tunnissa, ja meni tähän matkaan 5 tuntia. Palattaessa moottori lakkasi käymästä 3 tunnin kuluttua ja pojat joutuivat soutamaan lopun matkaa. Kuinka kauan paluumatka siten kesti kaikkiaan, jos moottorivene kulki poikien soutamana 4 kilometriä tunnissa?

6. Mitä saadaan, jos lukujen 78 ja 840 tulo jaetaan luvulla 63?

7. Mikä on summan kolmas yhteenlaskettava, jos ensimmäinen yhteenlaskettava on 2 metriä 5 senttimetriä, toinen yhteenlaskettava on 8 senttimetriä pienempi kuin ensimmäinen ja itse summa on 9 metriä?

8. Heikki, Otto ja Mikko jakoivat 120 markkaa siten, että Heikki ja Otto kumpikin saivat yhtä paljon, mutta Mikko sai 15 markkaa enemmän kuin Otto. Kuinka paljon kukin poika sai?

9. Millä luvulla 8 metriä on kerrottava, jotta kun näin saatuun tuloon lisätään tuhatkolmekymmentä kilometriä, summaksi saadaan 6 750 kilometriä?

10. Kauppias osti 3 000 markalla 12 kiloa munia, jotka painoivat 60 grammaa kappale. Häneltä särkyi 5 munaa, ja muut hän myi 18 markan hintaan kappaleelta. Voittiko vai hävisikö kauppias koko tässä kaupassa ja kuinka paljon?