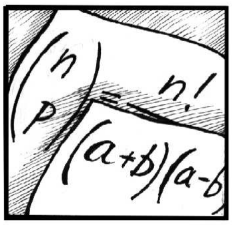

Taikasummat ja -tulot

Monien tuntemalla taikaneliöllä

$$\begin{array}{ccc} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{array}$$

on ominaisuus, että kun kolme lukua sen jokaisella kolmella rivillä tai jokaisessa kolmessa sarakkeessa tai kahdella lävistäjällä lasketaan yhteen, niin summaksi tulee sama luku 15. Tätä lukua kutsutaan neliön *taikasummaksi*.

Vähemmän tunnettua on, että jos jokaisella rivillä olevat kolme lukua kerrotaan keskenään ja näin saadut kolme tuloa lasketaan yhteen,

$$8 \cdot 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 4 \cdot 9 \cdot 2 = 225,$$

saadaan sama summa kuin kertomalla kaikissa sarakkeissa olevat kolme lukua keskenään ja laskemalla näin saadut kolme tuloa yhteen:

$$8 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \cdot 9 + 6 \cdot 7 \cdot 2 = 225.$$

Tätä lukua kutsutaan neliön *taikatuloksi*.

Seuraavaksi kerrotaan rivin luvut pareittain keskenään joka rivillä ja lasketaan ne yhteen,

$$(8{\cdot}1+1{\cdot}6+6{\cdot}8)+(3{\cdot}5+5{\cdot}7+7{\cdot}3)+(4{\cdot}9+9{\cdot}2+2{\cdot}4) = 195.$$

Sitten tehdään sama sarakkeittain,

$$(8{\cdot}3+3{\cdot}4+4{\cdot}8)+(1{\cdot}5+5{\cdot}9+9{\cdot}1)+(6{\cdot}7+7{\cdot}2+2{\cdot}6) = 195.$$

Tulokset ovat jälleen samat! Tätä lukua kutsutaan neliön *pareittain lasketuksi taikatuloksi*.

Muut 3×3 -taikaneliöt, joissa esiintyvät luvut yhdestä yhdeksään, ovat vain yllä olevan taikaneliön peilikuvia tai siitä kierrolla saatuja, kuten

$$\begin{array}{ccc} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{array} \quad \text{tai} \quad \begin{array}{ccc} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{array} \quad \text{tai} \quad \begin{array}{ccc} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{array}$$

Kaikissa näissä esimerkeissä olevat taikasummat, taikatulot ja pareittain lasketut taikatulot ovat samat kuin ensimmäisessä taikaneliössä. Taikaneliöitä voi kuitenkin muodostaa myös käyttämällä muitakin yhdeksänlukuisia lukujoukkoja. Alla on kolme esimerkkiä.

	9	2	7	4	5	9	6	5	13
TAIKANELIÖ:	4	6	8	11	6	1	15	8	1
	5	10	3	3	7	8	3	11	10
Taikasumma:		18			18			24	
Taikatulo:		468			414			840	
Pareittain laskettu taikatulo:		294			285			489	

Löydätkö muita 3×3 -taikaneliöitä?

Edellä olevia esimerkkejä voi tietenkin kiertää tai peilata tai neliön luvut voi kertoa jollain vakiolla. Uudet neliöt ovat edelleen taikaneliöitä, eikä ole vaikea huomata, että saaduilla taikaneliöillä on edelleen taikatulon ja pareittain lasketun taikatulon ominaisuudet.

Minkä tahansa taikaneliön lukuihin voi myös lisätä saman vakion ja tuloksena on selvästi uusi taikaneliö. Tässä tapauksessa ei ole aivan ilmiselvää, että uudella neliöllä on edelleen taikatulon ja pareittain lasketun taikatulon ominaisuudet.

Yritä tehdä oma taikaneliö laittamalla muutama luku neliöön ja lisäämällä loput luvut siten, että rivit, sarakkeet ja lävistäjät summautuvat samaan lukuun. Joka kerta, kun onnistut tekemään taikaneliön, sinun kannattaa tarkistaa, että taikatulon ja pareittain lasketun taikatulon ominaisuudet toimivat myös.

Kun olet onnistunut tekemään muutaman lisäesimerkin, saatat huomata, että taikasumma on aina kolme kertaa taikaneliön keskimmäinen luku. Erityisesti näyttää siltä, että taikasumma on aina kolmen monikerta.

Selvitetään seuraavaksi järjestelmällinen tapa löytää kaikki 3×3 -taikaneliöt.

Olkoon keskimmäinen luku x, ja olkoon jokaisen rivin, sarakkeen tai lävistäjän taikasumma R.

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & x & * \\ * & * & * \end{array}$$

Laske keskimmäinen sarake, keskimmäinen rivi ja molemmat lävistäjät yhteen saaden näin $4R$.

$$\begin{array}{ccc} \backslash & | & / \\ — & x & — \\ / & | & \backslash \end{array}$$

Tämä summa sisältää keskimmäisen luvun 4 kertaa ja kaikki muut luvut kerran, joten sen täytyy summautua kaikkien lukujen summaan $3R$ yhteenlaskettuna 3 kertaa keskimmäinen luku. Siis

$$4R = 3R + 3x,$$

josta saadaan

$$R = 3x.$$

Tämä kertoo myös sen, että kaikkien lukujen summa neliössä on $9x$.

Nyt voit tehdä omat taikaneliösi. Valitset vain keskimmäisen luvun ja kaksi lukua muualle neliöön, jonka jälkeen täytät koko taikaneliön siten, että jokainen rivi summautuu samaan lukuun kuin 3 kertaa keskimmäinen numero.

Esimerkiksi, jos luku keskellä on 7, rivin summan täytyy olla 21, eli luvuista

$$\begin{array}{ccc} 8 & * & 10 \\ * & 7 & * \\ * & * & * \end{array}$$

saadaan taikaneliö

$$\begin{array}{ccc} 8 & 3 & 10 \\ 9 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & 6 \end{array}$$

Jos "kulmiksi" valitaan $x + a$ ja $x + b$, siis

$$\begin{array}{ccc} x+a & * & x+b \\ * & x & * \\ * & * & * \end{array}$$

niin tällöin taikaneliö on

$$\begin{array}{ccc} x+a & x-a-b & x+b \\ x-a+b & x & x+a-b \\ x-b & x+a+b & x-a \end{array}$$

Ainoastaan perusalgebraa käyttäen on mahdollista tarkistaa, että yleinen 3×3 -taikaneliö täyttää taikatulon ja parittain lasketun taikatulon ominaisuudet. Tämän toteaminen jää kiinnostuneen lukijan omaksi harjoitukseksi.

Mitä tapahtuu 5×5 -taikaneliössä? Kokeile alla olevaa esimerkkiä.

10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9
23	6	19	2	15
4	12	25	8	16

Mitä havaitset?

Lähde: *NRICH*, University of Cambridge, *http://nrich.maths.org/*.
Käännös ja ladonta: ***Kalle Siljander***