Potenssien vaihdannaisuudesta ja liitännäisyydestä

Lajos Lóczi
Eötvös Loránd -yliopisto, Unkari

Yhteen- ja kertolasku noudattavat molemmat vaihdantalakia

$$a+b=b+a \text{ ja } a\cdot b=b\cdot a$$

ja liitäntälakia

$$(a+b)+c=a+(b+c) \text{ ja } (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

kaikilla reaaliluvuilla a, b ja c. Potenssiin korotus ei kuitenkaan ole vaihdannainen eikä liitännäinen, sillä yleensä

$$a^b\neq b^a \text{ ja } a^{(b^c)}\neq (a^b)^c.$$

Tästä huolimatta yhtäsuuruus saattaa olla voimassa tietyissä tapauksissa. Tarkoituksemme on löytää kaikki positiiviset reaalilukuparit (x,y) ja kolmikot (x,y,z), jotka täyttävät ehdot

$$x^y=y^x \tag{1}$$

ja vastaavasti

$$x^{(y^z)}=(x^y)^z. \tag{2}$$

Tutkimme näiden yhtälöiden rationaaliluku- ja reaalilukuratkaisuja.

Vaihdannaisuus

Aluksi haluamme löytää positiivisen reaalilukuratkaisun tapaukseen (1). (Rajoitumme vain positiivisiin ratkaisuihin, sillä potenssiin korotukset eivät ole yleisesti määriteltyjä negatiivisille reaaliluvuille. Myöskään tilanne, jossa muuttujat ovat nollia, ei kiinnosta meitä.) Yritetään aluksi arvata joitain ratkaisuja. Löydämme pian ratkaisun $x=2$ ja $y=4$ (tai päinvastoin). Koska (1):llä ei näytä olevan muita positiivisia kokonaislukuratkaisuja, kokeilemme joitain neliö- ja kuutiojuuria. Jos olemme onnekkaita, keksimme ratkaisun $x=\sqrt{3}$ ja $y=3\sqrt{3}$, sillä

$$(3\sqrt{3})^{\sqrt{3}}=(\sqrt{3}^3)^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}^{3\sqrt{3}}.$$

Asian ydin on, että $3\sqrt{3}$ voidaan kirjoittaa myös $\sqrt{3}^3$. Jos tutkimme asiaa edelleen, osumme pariin $x=\sqrt[3]{4}$ ja $y=4\cdot\sqrt[3]{4}$, joka on ratkaisu, sillä

$$(4\cdot\sqrt[3]{4})^{\sqrt[3]{4}}=(\sqrt[3]{4}^4)^{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{4}^{4\cdot\sqrt[3]{4}}.$$

Tällä kertaa yhtäsuuruus $4\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{4}^4$ on avainasemassa. Havaitsemme, että olennaisesti kaikissa esimerkeissä vallitsee tilanne $y=vx$ ja $vx=x^v$. Lähdemme etenemään tästä seikasta.

Uuden muuttujan käyttöönotto

Esitämme y:n muodossa $y = vx$, missä v on reaalilukumuuttuja, eli asetamme $v = \frac{y}{x} > 0$. Silloin (1) tulee muotoon

$$(vx)^x = y^x = x^y = x^{vx} = (x^v)^x.$$

Tässä jokainen termi on positiivinen, joten jos korotamme yhtälöketjun oikean- ja vasemmanpuoleisimman osan potenssiin $\frac{1}{x}$, saamme ratkaisuna relaation $vx = x^v$. Kertomalla $\frac{1}{x}$:llä saamme $v = x^{v-1}$. Jos $v \neq 1$, eli $x \neq y$, niin korottamalla potenssiin $\frac{1}{v-1}$ saamme $x = v^{\frac{1}{v-1}}$. Vastaavasti y:lle saadaan

$$y = vx = v \cdot v^{\frac{1}{v-1}} = v^{\frac{1}{v-1}+1} = v^{\frac{v}{v-1}} = x^v.$$

Jos $v = 1$, niin $x = y$.

Muuttujalle x saatu muoto esiintyy myöhemmin useita kertoja, joten asetamme $h(v) = v^{\frac{1}{v-1}}$. Funktion h määrittelyalue on positiivisten reaalilukujen joukko, josta on poistettu 1, ja sen arvojoukko on positiivisten reaalilukujen osajoukko.

Meillä on nyt mahdolliset ratkaisut, jotka ovat itse asiassa ratkaisut yhtälölle (1): jos $v = 1$ ja x on mielivaltainen positiivinen reaaliluku, niin $y = x$ on selvästi triviaali ratkaisu. Jos $v \neq 1$, niin $x = h(v)$ ja $y = v \cdot h(v)$ ovat ei-triviaalit ratkaisut, sillä kuten juuri havaitsimme, $y = vx = x^v$ ja $y^x = (x^v)^x = x^{vx} = x^y$.

Ensimmäisen tuloksen saatiin asettamalla kaikki positiiviset reaaliratkaisut (x, y) yhtälölle $x^y = y^x$ muotoon (x, x) ja $(h(v), v \cdot h(v))$ ($x > 0$, $v > 0$, $v \neq 1$).

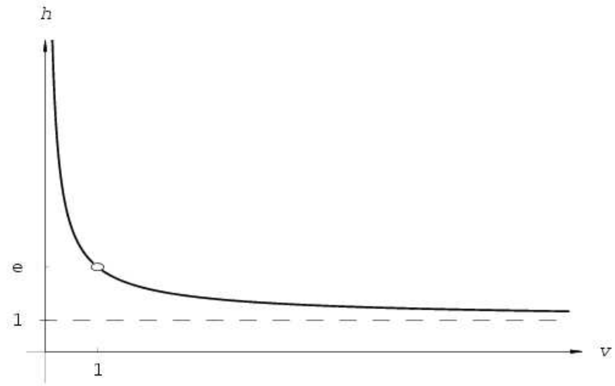
Funktiolla h on mielenkiintoisia ominaisuuksia. Jos $v > 0$ ja $v \neq 1$, niin $h(v)$ on arvo, joka kerrottuna v:llä tai korotettuna potenssiin v tuottaa saman tuloksen: $v \cdot h(v) = h(v)^v$, kuten olemme todistaneet. Toinen funktionaaliyhtälö, jonka h toteuttaa, on $v \cdot h(v) = h(\frac{1}{v})$ tai yhtäpitävästi $h(v) = \frac{1}{v} \cdot h(\frac{1}{v})$, kuten on helposti tarkistettavissa.

Tästä seuraa esimerkiksi, että ei-triviaalit ratkaisut voidaan kirjoittaa myös muotoon $(h(v), h(\frac{1}{v}))$. Näin ollen ratkaisu (x, y) on muunnettavissa ratkaisuksi (y, x) sijoituksella $v \mapsto \frac{1}{v}$.

Funktio h ei ole määritelty arvolle $v = 1$. Voidaan kuitenkin osoittaa, että se on aidosti vähenevä ja

$$\lim_{v \to 1} h(v) = e$$

(missä $e = 2{,}71828\ldots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku).



Kuva 1. $h(v) = v^{\frac{1}{v-1}}$.

Hieman analyysiä

Nyt haluaisimme saada (1):n ratkaisuista kuvan. Triviaaliratkaisut ($y = x$, kun $x, y > 0$) muodostavat xy-tason ensimmäisen neljänneksen puolittajan. Ei-triviaaliratkaisut eivät kuitenkaan ole tavallista muotoa $y = f(x)$, koska y:tä ei ole ilmaistu suoraan x:n avulla, vaan sekä x että y ovat molemmat parametrin v funktioita. Vähintäänkin nähdään, että jokaista h:n arvojoukkoon kuuluvaa x:ää kohti on olemassa täsmälleen yksi sellainen y, $y \neq x$, siten että $x^y = y^x$. Tämä merkitsee funktion $f : x \mapsto y$ olemassaoloa. Tätä funktiota käyttäen ei-triviaalit ratkaisut voidaan kirjoittaa muotoon $(x, f(x))$: jos h^{-1} merkitsee h:n käänteisfunktiota (joka on olemassa aidon monotonisuuden takia), niin $x = h(v)$ merkitsee, että $v = h^{-1}(x)$ ja täten $(h(v), v \cdot h(v)) = (x, h^{-1}(x) \cdot x)$ on se mitä vaadimme (kun $f(x) = x \cdot h^{-1}(x)$). Tämä käsittely ei kuitenkaan anna lisäinformaatiota, koska v:n ratkaiseminen lausekkeesta $x = h(v)$ – funktion h^{-1} määrittäminen – ei näytä mahdolliselta alkeisfunktiota käyttäen.

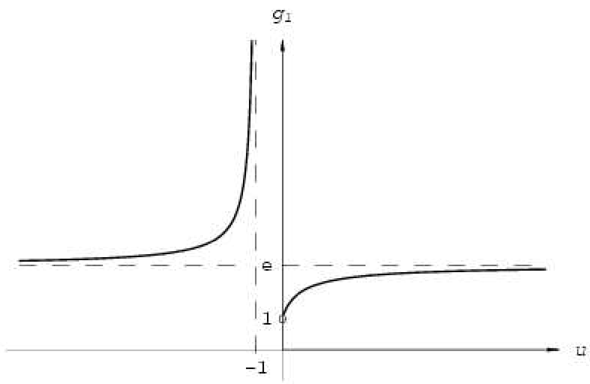
Tutkimme nyt funktioiden $h(v)$ ja $v \cdot h(v)$ käyttäytymistä parametriesityksessä, josta pystymme luonnostelemaan ei-triviaaliratkaisujen kuvaajan. Esittämällä tämä käyrä yhdessä triviaaliratkaisujen käyrän kanssa samassa koordinaatistossa saamme yhtälön (1) täydellisen positiivisen reaalilukuratkaisun.

Tarvitsemme funktion raja-arvon ja derivaatan käsitteitä (yhdessä joidenkin tunnettujen raja-arvojen kanssa), joten nämä todistukset jätetään tekemättä tai ainoastaan luonnostellaan. Hieman yksinkertaistaaksemme – ja nähdäksemme muutamia muita mukavia relaatioita – otamme jälleen käyttöön uuden muuttujan: parametrisoimme uudelleen koordinaattifunktiomme. Merkitköön u $h(v)$:n eksponenttia eli olkoon $u = \frac{1}{v-1}$. Silloin $v = 1 + \frac{1}{u}$. Tätä uutta muuttujaa käyttäen saamme kaksi funktiotamme muotoon

$$h(v) = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \text{ ja } v \cdot h(v) = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}.$$

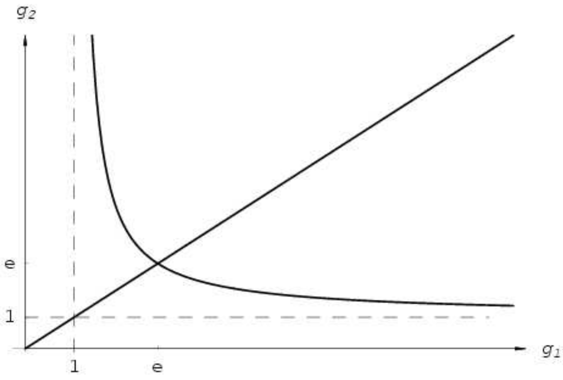
Kutsutaan näitä uusia funktioita vastaavasti $g_1(u)$:ksi ja $g_2(u)$:ksi. On helppo nähdä, että g_1:n ja g_2:n kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $x = -\frac{1}{2}$ suhteen xy-tasossa, koska x-akselin pisteen u kuva tässä peilauksessa on $(-u-1)$ ja sijoitus $u \mapsto (-u-1)$ muuttaa g_1:n g_2:ksi, koska $g_1(-u-1) = g_2(u)$ ja $g_2(-u-1) = g_1(u)$.

Riittää siis, kun tutkitaan funktiota g_1. Vastaavan funktion g_2 ominaisuudet ovat tämän jälkeen helposti johdettavissa. Koska v käy läpi positiiviset reaaliluvut, lukuun ottamatta lukua 1, on helppo nähdä, että sijoituksen jälkeen u käy läpi välin $\mathbb{R}\backslash[-1,0]$. Tämä on siis g_1:n määrittelyalue. Funktion g_1 käyttäytyminen määrittelyalueen päätepisteissä saadaan käyttämällä seuraavia tunnettuja raja-arvoja: $\lim_{u\to+\infty} g_1(u) = e$ alhaalta ja $\lim_{u\to 0+} g_1(u) = 1$ ylhäältä, koska sijoitus $\omega = \frac{1}{u}$ muuttaa sen raja-arvoksi $\lim_{\omega\to+\infty} \sqrt[\omega]{\omega+1}$. Edelleen $\lim_{u\to -1-} g_1(u) = +\infty$, koska kantaluku lähestyy nollaa yläpuolelta, kun eksponentti lähestyy lukua -1. Lopulta $\lim_{u\to-\infty} g_1(u) = e$ yläpuolelta. Tämän näkee, kun tekee sijoituksen $\omega = -u$. Funktio g_1 on jatkuva määrittelyalueellaan. Voidaan todistaa, etta se on aidosti kasvava väleillä $(-\infty,-1)$ ja $(0,+\infty)$. Sen kuvaaja on esitetty kuvassa 2.



Kuva 2. $g_1(u) = \left(1+\frac{1}{u}\right)^u$.

Nyt olemme valmiit piirtämään ei-triviaalit ratkaisut parametrisoinnilla $(g_1(u), g_2(u)), u \in \mathbb{R}\backslash[-1,0]$. Ne on esitetty kuvassa 3. Luonnollisesti tämä on yhtäpitävää alkuperäisen parametrisoinnin $(h(v), v\cdot h(v))$, $(v > 0, v \neq 1)$ kanssa. Kun u kasvaa $-\infty$:sta -1:een, pisteet $(g_1(u), g_2(u))$ määrittävät alemman oikeanpuoleisen kaaren kuvaajassa, koska ensimmäinen koordinaatti kasvaa e:stä $+\infty$:ään, toisen vähetessä aidosti e:stä 1:een. Kääntäen, kun u kasvaa 0:sta $+\infty$:ään, pisteet $(g_1(u), g_2(u))$ kuvaavat ylemmän vasemman osan kaaresta, koska ensimmäinen koordinaatti kasvaa 1:stä e:hen ja toinen koordinaatti vähenee $+\infty$:stä e:hen. 45° kulmassa oleva suora, kuten jo tiedämme, tulee triviaaleista ratkaisuista. Täten kuva 3 sisältää kaikki positiiviset parit (x,y), joissa vastaavat potenssit ovat vaihdannaisia. Ratkaisujen symmetrisyys ilmenee kuvaajan symmetrisyydessä suhteessa suoraan $y = x$. Triviaalit ja ei-triviaalit ratkaisut kohtaavat pisteessä (e,e).



Kuva 3.

Joitakin yksinkertaisia seurauksia

Edellä tehty analyysi tarkoittaa esimerkiksi, ettei potenssi ole vaihdannainen, jos kantaluku ja eksponentti ovat eri lukuja ja suuruudeltaan alle 1, koska ei-triviaalitapauksessa g_1:n ja g_2:n molempien arvot ovat > 1. Samoin jos $x, y > e$ ja $x \neq y$, niin yhtälöllä $x^y = y^x$ ei ole ratkaisuja. Lisäksi parametriesityksen korvaus lausekkeessa x^y tuottaa lausekkeen

$$h(v)^{v\cdot h(v)} = v^{\frac{v\, v^{\frac{v}{v-1}}}{v-1}}.$$

Voidaan todistaa, että tämän funktion arvojoukko on väli $(e^e, +\infty)$, mikä merkitsee esimerkiksi, että jos $x^y < e^e$ ja $x \neq y$, niin $x^y \neq y^x$.

Kokonais- ja rationaalilukuratkaisut

Positiivisen reaalilukuratkaisun jälkeen siirrytään tarkastelemaan yhtälön $x^y = y^x$ niitä ratkaisuja, jotka ovat kokonais- tai rationaalilukuja. On olemassa triviaaliratkaisuja – jokaisella kokonais- tai rationaaliluvulla x, kun $x > 0$ ja $y = x$ ovat sopivasti valittuja – ja ei-triviaaliratkaisuja. Kokonaislukuratkaisut voidaan päätellä käyttämällä kuvan 3 kuvaajaa: ylempi haara sisältää ainoastaan kokonaislukukoordinaattisen pisteen $(x,y) = (2,4)$, koska ensimmäinen koordinaatti täyttää ehdon $1 < x < e$, kun taas tiedosta $e < 3$ seuraa $x = 2$ (ja vastaavasti $y = 4$). Symmetriasta johtuen ainoa kokonaislukkukoordinaattinen piste alemmalla haaralla on (4,2). Nämä ovat (1):n kokonaislukuratkaisut.

Jotta saataisiin rationaalisia ratkaisuja, niin parametrin v arvot on määrättävä sellaisiksi, että molemmat parin $(h(v), v\cdot h(v))$ jäsenistä ovat positiivisia rationaalilukuja. Jos $h(v)$ ja $v\cdot h(v)$ ovat rationaalilukuja, niin myös v:n on oltava rationaaliluku, koska $h(v)$ on positiivinen. Voimmekin oletettaa, että $v = \frac{p}{q}$, missä p ja q ovat yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja. Epätriviaaleja ratkaisuja etsittäessä täytyy olla $v \neq 1$ ja $p \neq q$. Jos sijoitetaan $v \mapsto \frac{1}{v}$, niin vain x ja y vaihtuvat keskenään, joten on tarpeellista tutkia vain tapausta $v > 1$ (tai yhtäpitävästi $p > q$). Tämä tarkoittaa kuvan 3 kuvaajan ylemmän vasemman haaran tutkimista. Olkoon $p > q > 1$. Sijoittamalla $\frac{p}{q} = v$ saadaan

$$h(v) = (\frac{p}{q})^{\frac{q}{p-q}}.$$

Kun $m = p - q$, niin $m > 1$ on kokonaisluku. Osoitetaan ensin, että jos $m > 1$, niin $h(\frac{p}{q}) = \sqrt[m]{\frac{p^q}{q^q}}$ ei voi olla rationaaliluku. Koska p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä, niin murtoluku $\frac{p^q}{q^q}$ on sievennetyssä muodossa. Tällaisen murtoluvun m:s juuri voi olla rationaalinen vain, jos sekä osoittaja että nimittäjä ovat m:nsiä potensseja.

Olkoon $\sqrt[m]{\frac{r}{s}} = \frac{a}{b}$, missä r, s ja a, b ovat keskenään jaottomia lukuja (voidaan olettaa, että $r, s, a, b > 0$). Tällöin on voimassa $\frac{r}{s} = \frac{a^m}{b^m}$ ja edelleen a^m ja b^m ovat keskenään jaottomia. Koska supistettu muoto rationaaliluvuista on yksikäsitteinen (osoittaja ja nimittäjä ovat positiivisia), päättelemme, että r ja s ovat m. potensseja.

Näin ollen – kun tehdään vastaoletus, että $h(\frac{p}{q})$ on rationaalinen – on voimassa $p^q = a^m$ ja $q^q = b^m$. Nyt q:lla ja m:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, koska $p = q + m$ ja p:n ja m:n suurin yhteinen tekijä on 1, mistä seuraa, että p ja q ovat m:nsiä potensseja. Lopuksi otetaan mielivaltainen luku p:n alkulukuhajotelmasta. Jos sen eksponenttia merkitään k:lla, niin sen eksponentti p:n hajotelmassa on $p^q = k \cdot q$, joka on jaollinen m:llä. Koska m:n ja q:n suurin yhteinen tekijä on 1, huomataan, että k on jaollinen m:llä, ja siksi p on m:s potenssi. Samalla tavalla osoitetaan, että myös q on m:s potenssi.

Nyt yhtäsuuruus $m = p - q$ ei voi olla voimassa, koska kahden m:nnen eri potenssin erotus on suurempi kuin m. Jos nimittäin $t_1 > t_2 > 0$ ovat kokonaislukuja, niin

$$t_1^m - t_2^m = (t_1 - t_2)(t_1^{m-1} + t_1^{m-2}t_2 + ... + t_1 t_2^{m-2} + t_2^{m-1}),$$

ja oikea puoli on suurempi kuin $(t_1 - t_2) \cdot m \cdot t_2^{m-1}$, joka on vähintään yhtä suuri kuin m.

Olemme siis osoittaneet, että jos $m = p - q > 1$, niin $h(\frac{p}{q})$ on irrationaalinen.

Tapauksessa $m = 1$ (ts. $p = q + 1$) $h(v) = (\frac{q+1}{q})^q$ on selvästi rationaalinen. Tällöin $v \cdot h(v) = (\frac{q+1}{q})^{q+1}$. Käyttämällä q:n sijasta n:ää saadaan rationaaliratkaisu

$$x = (1 + \frac{1}{n})^n \text{ ja } y = (1 + \frac{1}{n})^{n+1},$$

tai päinvastoin, kokonaisluvuilla $n \geq 1$. (Jos $n = 1$, niin kaava antaa jo löydetyn kokonaislukuratkaisun $x = 2$ ja $y = 4$.) Näin ollen nämä ratkaisut ovat ne käyrän (kuva 3) pisteet, joissa molemmat koordinaatit ovat rationaalilukuja.

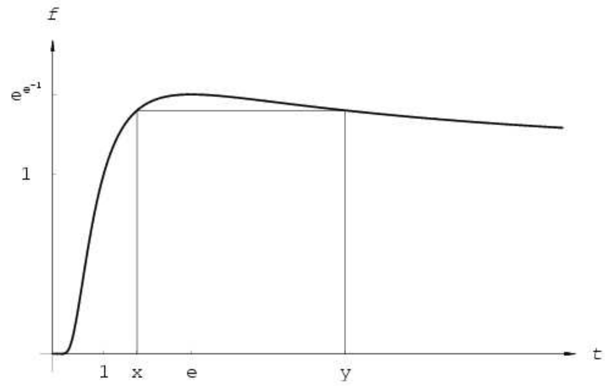
Kyseiset jonot $x = (1 + \frac{1}{n})^n$ ja $y = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ ovat tärkeitä reaalianalyysissä, koska ne lähestyvät lukua e, kun $n \to +\infty$: tämä vakio määritellään yleensä näiden jonojen raja-arvona. Olemme näyttäneet toteen niiden erään toisen mielenkiintoisen ominaisuuden, nimittäin sen, että niiden toisiaan vastaavat termit ovat ainoat (positiiviset ja erisuuret) rationaaliluvut, joille potenssit x^y ja y^x ovat vaihdannaisia.

Toisenlainen lähestymistapa

Lopuksi esitetään toisenlainen lähestymistapa, jolla saadaan tietoa yhtälön $x^y = y^x$ ratkaisuista. Jos korotetaan yhtälön molemmat puolet potenssiin $\frac{1}{xy}$ $(x, y > 0)$, saadaan $x^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{y}}$, mikä edellyttää saman funktion (ei välttämättä eri muuttujien) kahden arvon yhtäsuuruutta: alkuperäinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $f(x) = f(y)$ kanssa, kun $f(t) = t^{\frac{1}{t}}$, $t > 0$.

Saamme triviaaliratkaisun, kun $x = y$. Kysymys kuuluukin, voiko yhtälö päteä, kun $x \neq y$? Analyysiä jatkamalla osoitetaan (käyttämällä raja-arvoa ja funktion monotonisuutta), että funktio f on välillä $(0, 1)$ bijektio ja kuvaa välit $(1, e)$ ja (e, ∞) välille $(1, e^{\frac{1}{e}})$. (Fuktio on aidosti kasvava välillä $(1, e)$ ja aidosti vähenevä välillä (e, ∞).) Funktion f jatkuvuuden avulla voidaan osoittaa, että alkuperäisellä yhtälöllä on eitriviaaliratkaisuja: jokaista $1 < x < e$ kohti on olemassa täsmälleen yksi y $(e < y < +\infty)$ siten, että $f(x) = f(y)$, ja kääntäen jokaista $e < x < +\infty$ kohti on olemassa täsmälleen yksi y $(1 < y < e)$ siten, että $f(x) = f(y)$, katso kuva 4. Jos $x \in (0, 1]$ tai $x = e$, vain $y = x$ antaa tuloksen $f(x) = f(y)$.

Yhteenvetona, jos $x \in (0, 1]$ tai $x = e$, niin on olemassa yksikäsitteinen y, kun taas jos $x \in (1, e)$ tai $x \in (e, +\infty)$, niin on olemassa kaksi y:tä siten, että $x^y = y^x$. Tällä lähestymistavalla saadaan selville helposti ratkaisujen määrä, mutta ei itse ratkaisuja.



Kuva 4. $f(t) = t^{\frac{1}{t}}$.

Liitännäisyys

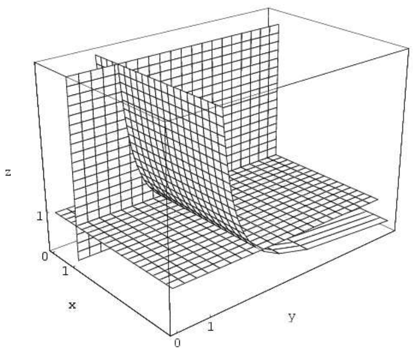
Tarkoituksena on määrittää kaikki ne positiiviset luvut x, y, z, joille on voimassa

$$(x^y)^z = x^{(y^z)}.$$

Yhtälön vasen puoli on selvästi sama kuin x^{yz}. Jos $x \neq 1$, niin saadaan $yz = y^z$. Tämän yhtälön saimme juuri vaihdannaisessa tapauksessa. Jos $z = 1$, niin jokainen positiivinen y on ratkaisu, muulloin $y = h(z)$.

Tämän vuoksi saamme ratkaisuiksi kaikki positiiviset luvut x, y, z, joiden potenssit täyttävät seuraavat ehdot (katso kuva 5):

$$(1, y, z),\ \text{missä } y, z > 0,$$
$$(x, y, 1),\ \text{missä } x, y > 0,\ x \neq 1,$$
$$(x, h(z), z),\ \text{missä } x, z > 0,\ x \neq 1,\ z \neq 1.$$



Kuva 5.

Kokonais- ja rationaalilukuratkaisut

Vaihdannaisen tapauksen tutkimisesta saatiin tuloksena rationaaliratkaisut. Lähtemällä reaalilukuratkaisuista päädytään siihen tulokseen, että positiiviset rationaalilukupotenssit ovat liitännäisiä, jos kolmikko (x, y, z) kuuluu johonkin seuraavista luokista:

$$(1, y, z),\ \text{missä } y, z > 0 \text{ ovat rationaalilukuja},$$
$$(x, y, 1),\ \text{missä } x, y > 0,\ \text{ovat rationaalilukuja},\ x \neq 1,$$
$$\left(x, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \frac{n+1}{n}\right),\ \text{missä } 0 < x \neq 1$$
$$\text{on rationaaliluku ja } n \text{ positiivinen kokonaisluku},$$
$$\left(x, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \frac{n}{n+1}\right),\ \text{missä } 0 < x \neq 1$$
$$\text{on rationaaliluku ja } n \text{ on positiivinen kokonaisluku}.$$

Kaksi ensimmäistä tapausta ovat triviaaleja. Kaksi jälkimmäistä johtuvat ratkaisuista $(x, h(z), z)$, koska vaihdannaisessa tapauksessa on koottu yhteen kaikki rationaaliluvut v, joilla $h(v)$ on myös rationaaliluku. (Korvaa v nyt z:lla.) Silloin havaitsemme, että jos $v = \frac{p}{q}$, kun $p > q \geq 1$ ja p, q ovat kokonaislukuja, niin $h(v)$ on rationaalinen, jos ja vain jos $p = q + 1$, mikä johtaa kolmanteen tapaukseen (kun korvataan q n:llä ja sallitaan myös, että $q = 1$). Lopuksi, jos jälleen $v = \frac{p}{q}$, mutta tällä kertaa $p > q \geq 1$, niin vaihdannaisen tapauksen todistus on oikea, kun vaihdetaan p ja q keskenään ja saadaan ainoaksi mahdollisuudeksi $q = p + 1$. Tämä on kuvattu neljännellä rivillä. (Tapaus $p = q$ on jo käsitelty yllä, koska tässä $z \neq 1$.)

Samoin kuin kokonaislukuratkaisuissa kolmas rivi ylhäältä antaa kokonaislukuratkaisuja vain, jos $n = 1$, mutta viimeinen rivi ei koskaan, joten yhtälön (2) positiiviset kokonaislukuratkaisut ovat seuraavassa:

$$(1, y, z),\ \text{missä } y, z > 0 \text{ ovat kokonaislukuja},$$
$$(x, y, 1),\ \text{missä } x, y > 0 \text{ ovat kokonaislukuja},\ x \neq 1,$$
$$(x, 2, 2),\ \text{missä } x > 1 \text{ on kokonaisluku}.$$

Lähde: *KöMaL*, `http://www.komal.hu`.
Artikkelin kääntämiseen ja Solmussa julkaisuun on saatu lupa sekä lehdeltä että artikkelin kirjoittajalta.
Käännös ja ladonta: ***Anneli Ketola*** ja ***Anja Koistinen***