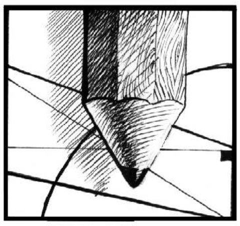

Niukan esittely

Tuomas Korppi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

∀: Hei kaikki, minä olen universaalikvanttori.

∃: Höh, *Aa*, mikäs titteli tuo nyt on olevinaan?

∀: Matemaatikot kutsuvat ylösalaisin käännettyä A:ta universaalikvanttoriksi.

∃: Jos kerran aletaan hienostelemaan, niin en minäkään sitten ole *Ee*, vaan eksistenssikvanttori.

∀: Palataan kuitenkin asiaan. Me seikkailemme kirjoitelmassa *Pelataan niukkaa.*

∃: Me pelaamme siellä kaikenlaisia pelejä.

∀: Kirjoitelma löytyy Solmu-lehden verkkoversiosta, ja sen osoite on `http://solmu.math.helsinki.fi/2005/1/`.

Klassisesta matematiikasta löytyy paljon mielenkiintoisia ongelmia ja niiden nerokkaita ratkaisuja.

∃: En minä vain ole löytänyt matematiikasta mitään mielenkiintoista. Matematiikkahan on vain kokoelma suttuisia kaavoja paperilla.

∀: Ehkä asiaan pitäisi syventyä. Kaavat ovat vain kieli asioiden ilmaisemiseen, ja ehkäpä ne kaavojen kuvailemat asiat ovat mielenkiintoisia.

∃: No siinä tapauksessa jonkun pitäisi kyllä kehittää houkuttelevampi tapa kuvata asioita.

Esimerkki tällaisesta ongelmasta on jatkuvuuden määritteleminen: Kuinka voisimme antaa matemaattisesti täsmällisen luonnehdinnan, jonka avulla voisimme erottaa jatkuvat funktiot muista funktioista?

∀: Jatkuvuus on venyvä ominaisuus. Jos jatkuvan funktion kuvaajaa venytetään eri tavoin, on tuloksena edelleen jatkuvan funktion kuvaaja.

∃: Kuinka sitten voisi *laskea*, onko funktio jatkuva? Laskun tuloshan on aina täsmällinen, eikä siinä ole mitään epämääräistä tai venyvää.

∀: En tiedä. Ehkä Tuomas kertoo, kunhan luemme hiukan pidemmälle.

Eräs ensimmäisenä mieleen tuleva tapa luonnehtia jatkuvuus on käyttää infinitesimaalisen pienen (eli äärettömän pienen) muutoksen käsitettä: Funktio on jatkuva, jos sen arvo muuttuu infinitesimaalisen vähän, kun pistettä, jossa funktion arvoa tutkitaan, muutetaan infinitesimaalisen vähän. Määritelmä toimii, jos infinitesimaalisen pienen luvun käsite saadaan kehitettyä toimivaksi. Infinitesimaalisen pienen luvun käsite saadaan kehitettyä (Abraham Robinsonin *Epästandardi analyysi*), mutta se on monimutkaista jopa matemaattisesti koulutetulle henkilölle.

∃: Nyt Tuomas alkoi puhua jostain yliopistotason kamasta, joka vaatii vuosikausien perehtymistä. Jos jatkuvuuden ymmärtäminen vaatii yliopistotason opintoja, minä taidan mielummin lähteä pelaamaan pelejä.

∀: Ehkä voisi löytyä joku tapa luonnehtia jatkuvuutta ilman, että täytyy viitata äärettömän pieniin lukuihin.

∃: Just joo. Väitätkö muka, että voisimme viitata äärettömän pieneen muutokseen *kiertoilmauksella*, jossa itse asiassa puhutaan pelkästään äärellisen kokoisista luvuista? Vähän niin kuin poliittisesti korrektisti.

Differentiaali- ja integraalilaskennan kehitys suunnilleen vuosina 1600–1900 paljasti, että tällainen kiertoilmaus on olemassa. Funktio on jatkuva pisteessä a, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, jolle kaikilla x, $|x-a| < \delta$, pätee $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

∃: Tuosta minä en ymmärrä hölkäsen pöläystä.

∀: Katso hiukan tarkemmin. Kyllä sinä ymmärrät kaikki merkit. ϵ ja δ ovat vain reaalilukumuuttujia.

∃: No joo, mutta niistä muodostettu kokonaisuus on niin monimutkainen, ettei sitä pysty hahmottamaan.

Kiertoilmauksessa esiintyy kolminkertainen kvantifiointi ”kaikilla ... on olemassa ... siten, että kaikilla ... pätee ...”. Sen hahmottaminen on todella vaikeaa.

∀: Kvantifiointi tarkoittaa ilmauksia ”kaikki” ja ”on olemassa”.

Onneksi matemaattinen logiikka tarjoaa tavan hahmottaa sisäkkäisiä kvantifiointeja. Lause

> ”Kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, jolle kaikilla x, $|x-a| < \delta$, pätee $|f(x) - f(a)| < \epsilon$”

ajatellaan pelinä, jossa pelaajat ∀ ja ∃ valitsevat vuorotellen arvoja muuttujille ϵ, δ ja x.

∃: No niin, nyt päästiin asiaan.

∀ yrittää valita arvot niin, että lauseen ehto $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ on epätosi, ja ∃ yrittää valita arvoja niin, että ehto on tosi. Lauseen totuus riippuu siitä, kummalla pelaajalla on voittostrategia. Jos voittostrategia on ∃:llä, on lause tosi, ja jos voittostrategia on ∀:lla, on lause epätosi. (Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen loogikot ovat muuten kunnostautuneet erilaisten logiikkaan liittyvien pelien tutkimuksessa.)

∃: Pelataan jatkuvuuspeli pisteessä 0 funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = 5x$.

∀: Valitsen ϵ:n arvon $0,1$!

∃: Valitsen δ:n arvon $0,01$!

∀: Valitsen x:n arvon $0,001$!

∃: $|f(x) - f(0)| = 0,001 \cdot 5 = 0,005 < 0,1 = \epsilon$. Voitin!

Pelataan niukkaa-kirjoitelmaa lukiessa ei tarvitse tyytyä passiivisesti omaksumaan esitettyä asiaa, vaan lukija pääsee itse ratkomaan tehtäviä, joissa etsitään voittostrategioita jatkuvuutta kuvaaviin peleihin.

∀: Ja vaikeissa kohdissa me annamme hyviä neuvoja.

∃: Pelataan jatkuvuuspeli pisteessä 0 funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^{42}$.

∀: Kuule, tämä teksti alkaa olla liian pitkä paperiversioon.

∃: Lähdetäänkö sitten verkkoversioon pelaamaan? Osoitehan on `http://solmu.math.helsinki.fi/2005/1/`.

∀: Lähdetään vaan. Vaikka lukija olisi tippunut kärryiltä tätä johdantoa lukiessa, se ei haittaa. Verkkoversiossa asiat selitetään huolellisesti alusta pitäen.

∃: Eikä siellä puhuta mistään kolminkertaisista kvantifioinneista, vaan jatkuvuus määritellään suoraan pelin avulla.