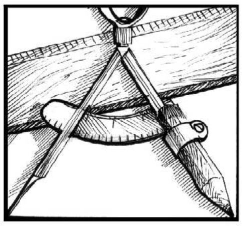

Trigonometriset funktiot

Pekka Alestalo
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Johdanto

Trigonometriset funktiot määritellään lukiokursseissa joko kolmioiden sivujen pituuksien suhteina tai hieman yleisemmin yksikköympyrän avulla. Määritelmä on havainnollinen, mutta siihen liittyy yksi vakava puute: Miten lasketaan esimerkisi $\sin(50°)$ kymmenen desimaalin tarkkuudella, niin kuin se monista laskimista saadaan?

Karkea likiarvo saadaan tietysti astemittaa ja viivotinta käyttämällä. Toinen mahdollisuus on laskea esimerkiksi puolikkaan kulman kaavoja toistuvasti käyttämällä $\sin(\pi/2^n)$ ja $\cos(\pi/2^n)$ suurilla n ja sen jälkeen yhteenlaskukaavojen avulla muita likiarvoja.

Mutta eikö funktion arvon pitäisi olla tarkasti laskettavissa pelkästään määritelmän avulla? Tämän kirjoituksen tarkoituksena on johtaa sinille ja kosinille sellaiset määritelmät, jotka toteuttavat myös tämän ehdon. Päättelyn seuraamiseen tarvitaan alkeellisia tietoja integraalilaskennasta ja lukujonon raja-arvosta. Lisäksi käytämme summamerkintää

$$\sum_{k=0}^{m} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_m.$$

Huomattakoon, että jonosta voidaan valita parillisia ja parittomia indeksejä vastaavat summat muodossa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_{2k} &= a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n}, \\ \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} &= a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}. \end{aligned}$$

Lähdetään liikkeelle seuraavista trigonometristen funktioiden ominaisuuksista:

- $\sin x$ ja $\cos x$ on määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$
- $\cos 0 = 1$
- $\sin(-x) = -\sin x$ ja $\cos(-x) = \cos x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$
- $D(\sin x) = \cos x$ ja $D(\cos x) = -\sin x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

Tässä muuttuja x on pelkkä reaaliluku, mutta helpoin tapa ominaisuuksien perustelemiseksi on tulkita se radiaaneissa annetuksi kulman arvoksi ja sijoittaa piste $(\cos x, \sin x)$ origokeskiselle 1-säteiselle ympyrälle. Kaikki muut sinin ja kosinin ominaisuudet seuraavat näistä neljästä kohdasta, ja itse asiassa kolmannessa kohdassa riittää vain ensimmäinen yhtälö, koska toinen seuraa siitä yhdessä derivaattoja koskevien ehtojen kanssa. Jos unohdamme kaiken muun, niin jaksollisuuteen tarvitaan vielä lisävaatimuksena jokin yhteys lukuun π, esimerkiksi muodossa $\sin\pi = 0$ tai $\cos(\pi/2) = 0$, mutta näitä emme tarvitse tässä tarinassa.

Likiarvojen laskeminen

Johdamme seuraavaksi menetelmän trigonometristen funktioiden arvojen laskemiseksi millä tahansa tarkkuudella. Käytämme yllä mainittuja ominaisuuksia suuntaviittoina.

Sijoittamalla $x = 0$ kaavaan $\sin(-x) = -\sin x$ nähdään, että $\sin 0 = 0$. Lisäksi

$$D(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2\sin x\cos x - 2\cos x\sin x = 0,$$

joten $\sin^2 x + \cos^2 x$ on vakio. Sijoittamalla $x = 0$ nähdään, että tämän vakion arvo on 1, joten päädyimme tuttuun kaavaan

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R}.$$

Tämän perusteella $-1 \le \sin x \le 1$ ja $-1 \le \cos x \le 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Osoittautuu, että sinille ja kosinille saadaan yhä tarkempia approksimaatioita integroimalla toistuvasti epäyhtälöä $\cos x \le 1$. Oletetaan aluksi, että $x \ge 0$. Kirjoitetaan muuttujan paikalle t ja integroidaan epäyhtälön molemmat puolet muuttujan t suhteen välillä $[0, x]$:

$$\cos t \le 1 \Longrightarrow \int_0^x \cos t\, dt \le \int_0^x 1\, dt \Longleftrightarrow \sin x \le x;$$

muista, että epäyhtälön suunta säilyy integroinnissa, vaikka funktiot eivät olisikaan positiivisia. Seuraavassa vaiheessa sijoitetaan tulokseen taas muuttuja t ja integroidaan välillä $[0, x]$:

$$\sin t \le t \Longrightarrow \int_0^x \sin t\, dt \le \int_0^x t\, dt \Longrightarrow 1 - \cos x \le \frac{1}{2}x^2.$$

Jatketaan samalla periaatteella neljä kertaa, jolloin saadaan seuraavat epäyhtälöt:

$$\begin{aligned}
x - \sin x &\le \frac{1}{2\cdot 3}x^3\\
-1 + \frac{1}{2}x^2 + \cos x &\le \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4\\
-x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \sin x &\le \frac{1}{5!}x^5\\
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cos x &\le \frac{1}{6!}x^6
\end{aligned}$$

Kokoamalla nämä tulokset yhteen saadaan arviot

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \le \quad &\cos x &\le 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4,\\
x - \frac{1}{3!}x^3 \le \quad &\sin x &\le x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5,
\end{aligned}$$

kun $x \ge 0$. Kosinin parillisuuden ($\cos(-x) = \cos x$) nojalla ylemmät epäyhtälöt ovat voimassa kaikilla $x \in \mathbf{R}$, mutta sinin parittomuuden ($\sin(-x) = -\sin x$) vuoksi alempien epäyhtälöiden suunta vaihtuu arvoilla $x < 0$. Kaikilla $x \in \mathbf{R}$ on kuitenkin voimassa

$$\begin{aligned}
\left|\cos x - (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4)\right| &\le \frac{1}{6!}x^6,\\
\left|\sin x - (x - \frac{1}{3!}x^3)\right| &\le \frac{1}{5!}|x|^5.
\end{aligned}$$

Jatkamalla integroimista päästään yhä tarkempiin approksimaatioihin ja yleisesti

$$\begin{aligned}
\left|\cos x - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\right| &\le \frac{1}{(2n+2)!}x^{2n+2},\\
\left|\sin x - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right| &\le \frac{1}{(2n+3)!}|x|^{2n+3}
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Summalausekkeiden muodon keksiminen saattaa tuntua ensi silmäyksellä vaikealta, mutta siihen ei ole muuta apua kuin kokeilu. Auki kirjoitettuna

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} &= \frac{(-1)^0}{(2\cdot 0)!}x^{2\cdot 0} + \frac{(-1)^1}{(2\cdot 1)!}x^{2\cdot 1}\\
&\quad + \frac{(-1)^2}{(2\cdot 2)!}x^{2\cdot 2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},
\end{aligned}$$

joka antaa täsmälleen oikeaa muotoa olevan polynomin. Täsmällisyyttä kaipaavat lukijat voivat todistaa epäyhtälöt oikeiksi käyttämällä matemaattista induktiota.

Osoitetaan seuraavaksi, että oikean puolen ylärajat lähestyvät nollaa jokaisella kiinteällä x, kun $n \to \infty$. Koska lausekkeet ovat hyvin samankaltaiset, tutkitaan vain kosinia. Merkitään siis $a_n = x^{2n+2}/(2n+2)!$ ja osoitetaan, että $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Tarkastellaan jonon kahden peräkkäisen termin suhdetta:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{x^{2(n+1)+2}/(2(n+1)+2)!}{x^{2n+2}/(2n+2)!}\\
&= \frac{(2n+2)!x^{2n+4}}{(2n+4)!x^{2n+2}}\\
&= \frac{x^2}{(2n+4)(2n+3)} < \frac{x^2}{4n^2},
\end{aligned}$$

sillä $(2n+4)! = (2n+4)(2n+3)\cdot(2n+2)!$. Tästä seuraa, että $a_{n+1}/a_n < 1/2$, kunhan vain $n > |x|/\sqrt{2}$. Toisin sanoen, tämän kiinteän rajan jälkeen jonon seuraava termi on aina alle puolet edellisestä. Koska jonon termit ovat positiivisia, ne lähestyvät tämän vuoksi nollaa. Vastaava päättely sini-funktion tapauksessa jää lukijan harjoitustehtäväksi.

On vielä syytä korostaa sitä, että nämä epäyhtälöt seuraavat alussa mainituista yksinkertaisista ominaisuuksista: mitään muita trigonometriaa koskevia tietoja ei ole päättelyssä käytetty.

Lasketaan vielä esimerkkinä alussa mainittu $\sin(50^\circ)$ niin tarkasti, että likiarvon virhe on alle 10^{-10}. Radiaaneissa mitattuna täytyy siis laskea $\sin(50\pi/180) = \sin(5\pi/18)$, joten muuttujan paikalle sijoitetaan $x = 5\pi/18 \approx 0{,}8726646262$. Vaadittu tarkkuus saavutetaan, jos

$$\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} < 10^{-10}.$$

Kokeilemalla eri n:n arvoja todetaan, että riittää valita $n = 5$, jolloin vaadittu approksimaatio on

$$\begin{aligned}
\sin(50^\circ) &\approx \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} \\
&\approx 0{,}7660444431,
\end{aligned}$$

jossa todellakin kaikki desimaalit ovat oikein (välivaiheissa esiintyvät luvut kuten π täytyy laskea riittävän tarkasti!).

Entä varsinainen määritelmä?

Johdimme yllä menetelmän sinin ja kosinin likiarvojen laskemiseen. Menetelmästä saadaan helposti myös tarkat määritelmät sille, mitä sini ja kosini oikeastaan ovat. Koska approksimaatioiden virhe lähestyy nollaa, voimme yksinkertaisesti sanoa, että

$$\begin{aligned}
\cos x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\
&= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots, \\
\sin x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots,
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Merkintä, jossa summan ylärajana on ääretön, tarkoittaa sarjakehitelmää. Sarjakehitelmän voi tulkita algoritmiksi, jolla funktion likiarvo voidaan laskea mielivaltaisen tarkasti, kunhan vain sarjan alusta otetaan riittävän monta (mutta kuitenkin äärellinen määrä!) termiä mukaan.

Voisimme nyt johtaa kaikki aikaisemmat ominaisuudet näistä määritelmistä lähtien. Tällöin tulee vastaan joitakin uusia ongelmia, joista suurin on kysymys siitä, saako sarjakehitelmiä derivoida termeittäin, eli voiko derivaatan viedä ongelmitta äärettömän summan sisälle. Tämä jääköön jo kirjoitukseni ulkopuolelle, mutta kehotan lukijaa derivoimaan sinin sarjakehitelmän termi kerrallaan summamerkinnän sisällä ja tutkimaan lopputulosta!

Lopuksi kehotan lukijaa palauttamaan mieleensä Solmussa 3/2003 ilmestyneen Markku Halmetojan hieman lennokkaamman kirjoituksen samasta aihepiiristä.