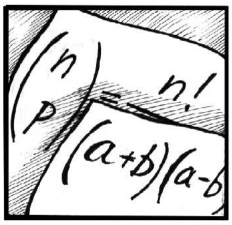

Potenssisummat ja symmetriset perusfunktiot

Jorma Merikoski
Professori
Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Tampereen yliopisto

1 ”Helppo ongelma matematiikan tohtorille”

Harrastan pientä pörssipeliä ja siksi luen silloin tällöin Kauppalehti Onlinen keskustelupalstaa *Sijoittaminen ja talous*. Siellä, kuten netin keskusteluryhmissä yleensäkin, seilaa kaikenlaista kirjoittajaa eikä asiassa pysyminen tai muu tiukkapipoisuus useinkaan haittaa tahtia. Niinpä nimimerkki ”Arvuuttelija” kirjoitti 8.6.2004 kello 13.46, että nimimerkki ”Indeksi-Into” on omien sanojensa mukaan matematiikan tohtori, joten hän antoi tälle seuraavan tehtävän, jonka ”kunnon lukiolainenkin pystyy ratkaisemaan”.

Ongelma. Olkoon

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 4 \\ a^2+b^2+c^2+d^2 &= 16 \\ a^3+b^3+c^3+d^3 &= 64 \\ a^4+b^4+c^4+d^4 &= 128. \end{aligned}$$

Laske $a^5+b^5+c^5+d^5$.

Jo kello 14.03 nimimerkki ”Savuporo” vastasi: ”Heh, eipä taida tämä tehtävä tohtorilta onnistua. Tosin ei onnistu minultakaan, ellei tuo viimeinen luku satu olemaan typo.” (Harjoitustehtävä: Miksi Savuporo ajatteli viimeisen luvun olevan väärin?) Tähän Arvuuttelija vastasi kello 14.06, ettei se ole typo. Hän jatkoi: ”Ei tätä tarkemmin ajateltuna lukiolainen ratkaise”. Sitten nimimerkki ”Mercurius” tuumi kello 14.18, että taisi tehtävä pelotella ”tohtorimme” pois.

Seuraavan puheenvuoron käytti nimimerkki ”Wiineri” kello 14.56 esittämällä huikean teorian, jonka mukaan Arvuuttelija onkin Indeksi-Into, jota on ”ketuttanut ettei kukaan usko häntä”! Into on löytänyt ”vanhasta tieteen kuvalehdestä” tämän ongelman, jonka hän siis esitti Arvuuttelijana ja ratkaisee piakkoin Intona! Kuitenkin Wiineri alkoi lopulta itsekin epäillä teoriaansa.

Keskustelu jatkui yhtä vauhdikkaasti. Vääriä vastauksia tuli siihen malliin, että kello 16.07 nimimerkki ”Jaaju” arveli Indeksi-Innon lähettelevän eri vastauksia eri nimimerkeillä! ”Pakkohan noista on jonkin osua jo oikeaankin.” Kello 16.49 nimimerkki ”Photius” ilmoitti ratkaisseensa tehtävän tietokoneella saaden vastaukseksi 384, mutta a, b, c ja d ovat ”helvetillisiä, sivun pituisia kompleksilukuja”.

Nimimerkki "Merck" ärähti 9.6. kello 9.56, että ylläpidon pitäisi poistaa tällaiset turhat "hiekkalaatikkotason" keskustelut, joilla ei ole mitään tekemistä sijoittamisen tai talouden kanssa. Wiineri vastasi kello 13.37, että tämä keskustelu kuuluu tälle palstalle ja nimenomaan ehkäisee talouteen kuulumattomia keskusteluja pitämällä Indeksi-Innon poissa maisemista!

Kun Arvuuttelija 9.6. kello 18.50 esitti oman ratkaisunsa, niin siitäkös syntyi rähinä. Nimimerkki "FreyTag" sanoi kello 20.05 suorat sanat: "En tajua yhtään, mistä te puhutte. Yksikään teistä ei voi olla missään vastuullisessa tai millään lailla merkittävästi johtavassa asemassa." Kello 21.44 nimimerkki "Kari Ilmari" löi lisää löylyä: "Oletko jotenkin tärähtänyt, kun pädet jollakin ongelmamatematiikan tehtävällä... Esität sen sitten täällä kuin seinähullu... Jutullasi et ole yhtään pätevämpi pörssikeskustelussa... Itse yritin muun muassa seuraavalla tavalla, joka ei kuitenkaan johtanut..."

Ehkä se, että Arvuuttelijan ratkaisussa ei tarvittu lukuja a, b, c ja d, sai Photiuksen jatkamaan töitä, ja 10.6. kello 10.25 hän ratkaisi tehtävän juuri siten kuin kokenut matematiikko tekee. Palaamme tähän ratkaisuun myöhemmin. Sekä Arvuuttelijan että Photiuksen ratkaisuihin riittävät periaatteessa lukiotiedot, mutta silloin täytyy olettaa tuollaisten lukujen a, b, c ja d olemassaolo, mitä ei voida todistaa lukiotiedoilla.

2 Johdatteleva esimerkki

Symmetrisen funktion arvo ei muutu vaihdettaessa muuttujien järjestystä. Toisen asteen yhtälön ratkaisujen tiettyjä symmetrisiä funktioita voidaan laskea ratkaisematta yhtälöä. Tällaiset asiat kuuluivat muutama vuosikymmen sitten lukion pitkään oppimäärään.

Tehtävä (ks. [9]). Laskettava symmetrisen funktion $x_1^3+x_2^3$ arvo, kun x_1 ja x_2 ovat yhtälön $x^2-4x+7=0$ ratkaisut.

Ratkaisemalla yhtälön joutuisimme hankaliin laskuihin vieläpä kompleksiluvuilla, joten käsittelemme tehtävän ratkaisematta yhtälöä. Ratkaisujen summan ja tulon ominaisuuksien perusteella $x_1+x_2=4$ ja $x_1x_2=7$. Koska

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)^3 &= x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3\\ &= x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2),\end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}x_1^3+x_2^3 &= (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)\\ &= 4^3-3\cdot 7\cdot 4 = -20.\end{aligned}$$

3 Symmetriset perusfunktiot

Määrittelemme muuttujien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *symmetriset perusfunktiot* (engl. *elementary symmetric functions*) $s_1, s_2, \ldots$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}s_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1+x_2+\cdots+x_n,\\ s_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\\ s_3(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots\\ &\qquad\qquad + x_{n-2}x_{n-1}x_n,\\ &\ldots\\ s_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1x_2\cdots x_n,\\ s_{n+1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= s_{n+2}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\cdots=0.\end{aligned}$$

Siis $s_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ on, kun $1\le k\le n$, kaikkien niiden luvuista x_1, x_2, ..., x_n saatujen tulojen summa, joissa on k tekijää ja jokaisella tekijällä on eri indeksi.

Reaali- tai kompleksikertoimisella polynomiyhtälöllä

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

on täsmälleen n ratkaisua, kun kutakin ratkaisua otetaan sen kertaluvun osoittama määrä. Olkoot ne x_1, x_2, ..., x_n, jolloin voimme kirjoittaa yhtälön muotoon

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=0.$$

Suorittamalla kertolaskut vasemmalla puolella saamme yhteyden yhtälön kerrointen a_k ja ratkaisujen symmetristen perusfunktioiden s_k välille

$$\begin{aligned}a_1 &= -s_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = -(x_1+x_2+\cdots+x_n),\\ a_2 &= s_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ &\ldots\\ a_k &= (-1)^k s_k(x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ &\ldots\\ a_n &= (-1)^n s_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (-1)^n x_1x_2\cdots x_n.\end{aligned}$$

Siis luvut x_1, x_2, ..., x_n ovat yhtälön

$$x^n-s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}+\cdots+(-1)^n s_n=0 \qquad (1)$$

ratkaisut, kun kirjoitamme lyhyesti $s_k = s_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

4 Potenssisummat

Määrittelemme muuttujien x_1, x_2, ..., x_n *potenssisummat* p_0, p_1, p_2, ... seuraavasti:

$$\begin{aligned}p_0(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= n,\\ p_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1+x_2+\cdots+x_n,\\ p_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2,\\ &\ldots\\ p_k(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k,\\ &\ldots\end{aligned}$$

Kirjoitamme lyhyesti $p_k = p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Johdamme potenssisummien ja symmetristen perusfunktioiden yhteyden. Sijoittamalla luvut x_1, x_2, ..., x_n yhtälöön (1) saamme yhtälöryhmän

$$\begin{aligned}
x_1^n - s_1 x_1^{n-1} + s_2 x_1^{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n &= 0\\
x_2^n - s_1 x_2^{n-1} + s_2 x_2^{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n &= 0\\
&\ldots\\
x_n^n - s_1 x_n^{n-1} + s_2 x_n^{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n &= 0
\end{aligned}$$

ja edelleen laskemalla yhteen yhtälön

$$p_n - s_1 p_{n-1} + s_2 p_{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n p_0 = 0.$$

Antamalla n:lle arvot 1, 2, 3, ... saamme tästä *Newtonin kaavat*

$$\begin{aligned}
p_1 &= s_1,\\
p_2 &= s_1^2 - 2s_2,\\
p_3 &= s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3,\\
p_4 &= s_1^4 - 4s_1^2 s_2 + 4s_1 s_3 + 2s_2^2 - 4s_4,\\
p_5 &= s_1^5 - 5s_1^3 s_2 + 5s_1 s_2^2 + 5s_1^2 s_3 - 5s_2 s_3 - 5s_1 s_4,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

ja myös muunnoskaavat toiseen suuntaan

$$\begin{aligned}
s_1 &= p_1,\\
s_2 &= \frac{1}{2!}(p_1^2 - p_2),\\
s_3 &= \frac{1}{3!}(p_1^3 - 3p_1 p_2 + 2p_3),\\
s_4 &= \frac{1}{4!}(p_1^4 - 6p_1^2 p_2 + 3p_2^2 + 8p_1 p_3 - 6p_4),\\
s_5 &= \frac{1}{5!}(p_1^5 - 10p_1^3 p_2 + 15p_1 p_2^2 + 20p_1^2 p_3\\
&\qquad - 30p_1 p_4 - 20p_2 p_3 + 24p_5),\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Joissakin termeissä (missä?) on säännönmukaisuuksia, mutta p_k:lle ja s_k:lle ei tietääkseni ole yksinkertaisia yleisiä lausekkeita.

5 Ongelman ratkaisu ja muita ongelmia

Sijoittamalla $p_1 = 4$, $p_2 = 16$, $p_3 = 64$, $p_4 = 128$ saamme $s_1 = 4$, $s_2 = s_3 = 0$, $s_4 = 32$. Nämä edelleen sijoittamalla löydämme ongelman ratkaisun $p_5 = 384$.

Tarkastelemme vielä eräitä muita kiinnostavia potenssisummiin liittyviä kysymyksiä. Hyväksymme eksponentiksi mielivaltaisen reaaliluvun, jolloin meidän on rajattava kantaluvut positiivisiksi. Olkoon $t \neq 0$. Määrittelemme muuttujien x_1, x_2, ..., $x_n > 0$ *t:nnen momenttisumman*

$$f_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1^t + x_2^t + \cdots + x_n^t)^{1/t}$$

ja *t:nnen momenttikeskiarvon*

$$g_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^t + x_2^t + \cdots + x_n^t}{n}\right)^{1/t}.$$

Tällöin g_1 on aritmeettinen ja g_{-1} harmoninen keskiarvo. Seuraavissa tehtävissä kiinnitämme luvut x_1, x_2, ..., $x_n > 0$.

Tehtävä 1. Todistettava, että

$$\lim_{t\to 0} g_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}.$$

Voimme siis määritellä, että g_0 on geometrinen keskiarvo.

Tehtävä 2. Todistettava, että

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} f_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \lim_{t\to\infty} g_t(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\
&= \max_k x_k,\\
\lim_{t\to-\infty} f_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \lim_{t\to-\infty} g_t(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\
&= \min_k x_k,\\
\lim_{t\to 0-} f_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0,\\
\lim_{t\to 0+} f_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \infty.
\end{aligned}$$

Tehtävä 3. Todistettava, että funktio $\phi(t) = f_t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $t \neq 0$, on vähenevä, kun $t < 0$, ja että se on vähenevä myös, kun $t > 0$. Lisäksi osoitettava, että väheneminen on aitoa, jos ja vain jos ei ole $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Tehtävä 4. Todistettava, että funktio $\gamma(t) = g_t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on kaikkialla kasvava. Lisäksi osoitettava, että kasvu on aitoa, jos ja vain jos ei ole $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Ratkaisuja löytyy kirjallisuudesta (ks. esim. [1], [3], [4], [5], [7]). Tehtäviin 2 ja 3 riittävät lukiotiedot ja kekseliäisyys. Tehtävät 1 ja 4 ovat vaikeampia eikä niistä taideta selviytyä tavallisilla lukiotiedoilla. L'Hospitalin säännöstä (ks. esim. [2]) ja Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöstä sekä sitä yleisemmästä Hölderin epäyhtälöstä (ks. esim. [1], [2], [3], [4], [5], [7]) on apua. Ehkä joku Solmun lukija innostuu ratkaisemaan jonkin näistä tehtävistä ja esittämään ratkaisun tässä lehdessä.

Kirjallisuutta

Potenssisummia ja symmetrisiä perusfunktioita käsittelevät alkeellisesti mm. Väisälä [8] ja Weisstein [10], syvemmin mm. Mitrinović [7] ja erittäin perusteellisesti mm. Bullen [3]. Tällä alalla on avoimiakin ongelmia. Minäkin olen joutunut niiden kanssa tekemisiin [6].

[1] E. F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities.* Springer, 1961.

[2] A. Browder, *Mathematical Analysis: An Introduction.* Springer, 1996.

[3] P. S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities.* Kluwer, 2003.

[4] G. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities. Second Edition.* Cambridge U.P., 1988.

[5] J. R. Magnus, H. Neudecker, *Matrix Differential Calculus.* Wiley, 1988.

[6] J. K. Merikoski, Extending means of two variables to several variables. *J. Ineq. Pure Appl. Math.* 5 (2004), Article 65. [http://jipam.vu.edu.au].

[7] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities.* Springer, 1970.

[8] K. Väisälä, *Johdatus lukuteoriaan ja algebraan.* Otava, 1950.

[9] K. Väisälä, *Algebran oppi- ja esimerkkikirja 2. Pitempi kurssi.* 8. p. WSOY, 1966.

[10] E. Weisstein, Eric Weisstein's world of mathematics. Wolfram Research. [http://www.mathworld.wolfram.com].