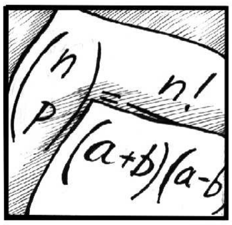


Oktoniot, Fanon taso ja Kirkmanin koulutyttöongelma

Jorma Merikoski
Professori
Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, Tampereen yliopisto

Johdanto

Kirjoitin viitteessä [5], että koska laajennuksessa kompleksilukujen joukosta $\mathbb{C}$ kvaternioiden joukkoon $\mathbb{H}$ menetetään kertolaskun vaihdantalaki, niin kvaternioilla ei ole kovin suurta merkitystä. Tällä en suinkaan vähätellyt kvaternioita (päinvastoin totesin niiden kiinnostavuuden), vaan lähinnä vertasin niiden merkitystä kompleksilukujen merkitykseen.

Kirjoitin myös, ettei lukukäsitettä kannata laajentaa $\mathbb{H}$:sta eteenpäin, sillä seuraavassa laajennuksessa, jolloin täytyy operoida $\mathbb{R}^8$:ssa, menetetään kertolaskun liitäntälakikin. Koska pidin tätä laajennusta mielenkiinnottomana, en viitsinyt mainita uusien lukujen nimeä. Ne ovat *oktonioita* ja niiden joukkoa merkitään $\mathbb{O}$:lla.

(Englanninkielisen sanan *octonion* sujuvampi käännös olisi *oktoni*. Tällöin olisi johdonmukaista kääntää *quaternion* sanaksi *kvaterni*, mutta "kvaternio" on suomenkielessä melko vakiintunut. Siksi puhun kvaternioista ja oktonioista, vaikka mielestäni olisi parempi puhua kvaterneista ja oktoneista.)

Sittemmin saatuani käsiini Baezin erinomaisen artikkelin [1] huomasin olleeni liian pessimistinen. Oktonioilla voidaan nimittäin osoittaa monia sellaisia matematiikan sisäisiä yhteyksiä, joita olisi muulla tavalla vaikea selittää. Minun täytyy kylläkin myöntää, etten ajan, kärsivällisyyden ja oppineisuuden puutteen takia ymmärtänyt läheskään kaikkea, mitä Baez kirjoittaa. Kuitenkin katson ymmärtäneeni sen verran, että voin erittäin alkeellisesti tarkastella oktonioita ja ikään kuin jatkaa kirjoitustani [5] käsittelemällä laajennusta $\mathbb{H} \to \mathbb{O}$.

Oktoniot

Merkitsemme "skalaareja" (eli tässä reaalilukuja) pienillä kreikkalaisilla kirjaimilla ja "vektoreita" (eli tässä kompleksilukuja, kvaternioita ja oktonioita) pienillä latinalaisilla kirjaimilla. Merkitsemme 1:llä paitsi reaalilukua 1 myös sellaista vektoria, jonka ensimmäinen koordinaatti $= 1$ ja muut $= 0$.

Tarkastelemme vektoriavaruutta $\mathbb{R}^8$ (joka koostuu 8-alkioisista reaalilukujonoista). Määrittelemme *perusoktonioiden* $1 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$, $e_1 = (0,1,0,0,0,0,0,0)$, $e_2 = (0,0,1,0,0,0,0,0)$, ..., $e_7 = (0,0,0,0,0,0,0,1)$ joukossa E kertolaskun seuraavalla taulukolla.

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Esimerkiksi $e_3e_5 = e_2$. Tämä taulukko saattaa vaikuttaa kovin sekavalta, mutta säännönmukaisuuksia löytyy.

- *Neliöt* $e_1^2 = e_2^2 = \cdots = e_7^2 = -1$.
- *Vastavaihdannaisuus*[1] $e_re_s = -e_se_r \quad (r \neq s)$.
- *Indeksien kasvattaminen yhdellä* $e_re_s = e_t \Rightarrow e_{r+1}e_{s+1} = e_{t+1}$.
- *Indeksien kaksinkertaistaminen* $e_re_s = e_t \Rightarrow e_{2r}e_{2s} = e_{2t}$.

Kasvattamisessa ja kaksinkertaistamisessa käsittelemme indeksejä modulo 7; siis $e_8 = e_1$, $e_9 = e_2$ jne.

Määrittelemme yleisesti *oktonioiden* $(\xi_0, \ldots, \xi_7) = \xi_0 + \xi_1e_1 + \cdots + \xi_7e_7$ ja $(\eta_0, \ldots, \eta_7) = \eta_0 + \eta_1e_1 + \cdots + \eta_7e_7$ tulon vaatimalla, että skalaaritekijän siirtosääntö ja osittelulait ovat voimassa. (Osittelulakeja on kaksi, koska kertolasku ei ole vaihdannainen.) Toisin sanoen vaadimme, että tulo on *bilineaarinen* eli että se on *lineaarinen* (määritelmä, ks. esim. [8]) kummankin tekijän suhteen. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}
&(e_1 + 3e_2)(2e_5 - 4e_7) \\
&\quad = e_1(2e_5) - e_1(4e_7) + (3e_2)(2e_5) - (3e_2)(4e_7) \\
&\quad = 2e_1e_5 - 4e_1e_7 + 6e_2e_5 - 12e_2e_7 \\
&\quad = 2e_6 - 4(-e_3) + 6(-e_3) - 12(-e_6) \\
&\quad = 2e_6 + 4e_3 - 6e_3 + 12e_6 = 14e_6 - 2e_3.
\end{aligned}$$

E ja $\mathbb{Z}_2^3$

Vektoriavaruudessa $\mathbb{Z}_2^3$ (missä $\mathbb{Z}_2$ tarkoittaa jäännösluokkien modulo 2 joukkoa, ks. esim. [6], [7]) on kahdeksan alkiota. (Vektoriavaruuden määritelmä, ks. esim. [8].) Tämän vektoriavaruuden *skalaarikunta* ei ole $\mathbb{R}$ vaan $\mathbb{Z}_2$. (Kunnan määritelmä, ks. esim. [9].) Yhteenlasku ja skalaarilla kertominen määritellään tavanomaisesti, mutta käytetään $\mathbb{Z}_2$:n yhteen- ja kertolaskua.

Myös perusoktonioita on kahdeksan, joten voimme asettaa ne vastaamaan $\mathbb{Z}_2^3$:n pisteitä. Teemme sen *bijektiolla* (määritelmä ks. esim. [6]) $f\colon E \to \mathbb{Z}_2^3$:

$$\begin{aligned}
f(1) &= (0,0,0), & f(e_1) &= (0,1,1), \\
f(e_2) &= (1,1,0), & f(e_3) &= (1,0,0), \\
f(e_4) &= (1,0,1), & f(e_5) &= (0,1,0), \\
f(e_6) &= (0,0,1), & f(e_7) &= (1,1,1).
\end{aligned}$$

Määrittelemme joukossa E yhteenlaskun $\oplus$ laskemalla yhteen vastaavat $\mathbb{Z}_2^3$:n vektorit ja katsomalla, mitä perusoktoniota saatu summa vastaa. Toisin sanoen

$$e_r \oplus e_s = f^{-1}\big(f(e_r) + f(e_s)\big).$$

Esimerkiksi $e_2 \oplus e_4 = e_1$, koska vektorien $f(e_2) = (1,1,0)$ ja $f(e_4) = (1,0,1)$ summa $(0,1,1) = f(e_1)$. Kaikkiaan saamme taulukon

$\oplus$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	1	e_4	e_7	e_2	e_6	e_5	e_3
e_2	e_2	e_4	1	e_5	e_1	e_3	e_7	e_6
e_3	e_3	e_7	e_5	1	e_6	e_2	e_4	e_1
e_4	e_4	e_2	e_1	e_6	1	e_7	e_3	e_5
e_5	e_5	e_6	e_3	e_2	e_7	1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	e_7	e_4	e_3	e_1	1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	e_1	e_5	e_4	e_2	1

Tämä taulukko muistuttaa kiinnostavalla tavalla perusoktonioiden kertolaskutaulukkoa, josta se saadaan poistamalla miinusmerkit.

Määrittelemme joukossa E skalaarilla (eli $\mathbb{Z}_2$:n alkiolla) kertomisen niin, että skalaarilla 0 kertomalla saadaan E:n ”nolla-alkio” 1, ja skalaarilla 1 kertomalla saadaan alkio itse. Näin E:stä tulee vektoriavaruus.

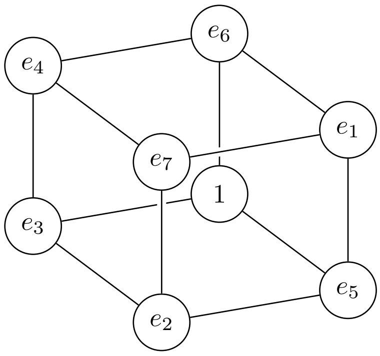
Laajennus $\mathbb{H} \to \mathbb{O}$

Jos yleisessä vektoriavaruudessa V määritellään bilineaarinen kertolasku, jolla on ykkösalkio (eli on olemassa sellainen $e \in V$, että kaikilla $x \in V$ on $xe = ex = x$), niin saatu struktuuri on nimeltään *algebra*. (Tämä nimitys ei ole hyvä, koska sanalla ”algebra” tarkoitetaan myös tiettyä matematiikan alaa.)

Esimerkiksi $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ja $\mathbb{O}$ ovat kukin vektoriavaruuksia, joiden skalaarikunnaksi voidaan ottaa $\mathbb{R}$. Näistä jokaisesta saadaan algebra, kun kertolasku määritellään tavanomaisesti. Myös samandimensioiset neliömatriisit muodostavat algebran, kun niiden laskutoimitukset (ks. esim. [8]) määritellään tavanomaisesti. Jos vektoriavaruuden V osajoukko on vektoriavaruus, niin se on V:n *aliavaruus*. Jos algebran V osajoukko on algebra, niin se on V:n *alialgebra*. Esimerkiksi $\mathbb{R}$ on $\mathbb{C}$:n alialgebra, kun samastamme reaaliluvun ξ ja kompleksiluvun $(\xi, 0)$. Edelleen $\mathbb{C}$ on $\mathbb{H}$:n alialgebra, kun samastamme kompleksiluvun (ξ, η) ja kvaternion $(\xi, \eta, 0, 0)$.

[1] Sanan ”antikommutatiivisuus” omatekoinen käännös aidolle suomenkielelle.

Miten sitten saamme $\mathbb{H}$:n $\mathbb{O}$:n alialgebraksi? Ehkä houkuttelisi samastaa kvaternio (ξ,η,ζ,ω) ja oktonio $(\xi,\eta,\zeta,\omega,0,0,0,0)$, mutta tuollaiset oktoniot eivät muodosta $\mathbb{O}$:n alialgebraa. Esimerkiksi e_2 ja e_3 ovat tätä muotoa, mutta niiden tulo $e_2e_3 = e_5$ ei ole. Meidän täytyy siis menetellä toisin.



Tarkastelemme joukkoa $\mathbb{Z}_2^3$ koordinaatistossa, johon sijoitamme myös perusoktoniot kohdassa määritellyn funktion f mukaisesti. Merkitsemme $e = (\alpha,\beta,\gamma)$ tarkoittamaan sitä, että $f(e) = (\alpha,\beta,\gamma)$. (Perustelemme tätä merkintää myöhemmin.) "Pohjatason" $\{1, e_2, e_3, e_5\}$ oktonioiden *virittämä* $\mathbb{O}$:n alialgebra $\mathbb{O}_1$ koostuu oktonioista $\xi + \eta e_2 + \zeta e_3 + \omega e_5 = (\xi,0,\eta,\zeta,0,\omega,0,0)$, missä ξ, η, ζ ja ω saavat kaikki reaaliarvot. On helppo nähdä, että $\mathbb{O}_1$ todellakin on $\mathbb{O}$:n alialgebra.

Samastamme kvaternion (ξ,η,ζ,ω) ja oktonion $(\xi,0,\eta,\zeta,0,\omega,0,0)$. Täsmällisesti sanottuna muodostamme *isomorfismin* (eli *struktruurin säilyttävän bijektion*) $\phi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{O}_1\colon \phi(\xi,\eta,\zeta,\omega) = (\xi,0,\eta,\zeta,0,\omega,0,0)$. Tällöin $\phi(x+y) = \phi(x)+\phi(y)$ ja $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{H}$ sekä $\phi(1_{\mathbb{H}}) = 1_{\mathbb{O}_1}$, missä $1_{\mathbb{H}} = (1,0,0,0)$ ja $1_{\mathbb{O}_1} = (1,0,0,0,0,0,0,0)$. Sanomme, että algebrat $\mathbb{H}$ ja $\mathbb{O}_1$ ovat keskenään *isomorfisia*. Ne voidaan samastaa, koska niillä on sama rakenne ja ainoa ero on merkinnöissä.

Kvaternioiden algebra $\mathbb{H}$ voidaan siis laajentaa oktonioiden algebraksi $\mathbb{O}$.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ ja $\mathbb{Z}_2^3$

Merkitsemme kuten edellä $e = (\alpha,\beta,\gamma)$ tarkoittamaan, että $f(e) = (\alpha,\beta,\gamma)$.

Vektoriavaruuden $\mathbb{Z}_2^3$ aliavaruudet ovat nollaulotteinen $\{(0,0,0)\} = \{1\}$, yksiulotteiset $\{(0,0,0),(1,0,0)\} = \{1, e_3\}$ ja kuusi muuta, kaksiulotteiset $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\} = \{1, e_2, e_3, e_5\}$ ja kuusi muuta sekä kolmiulotteinen $\mathbb{Z}_2^3 = E$.

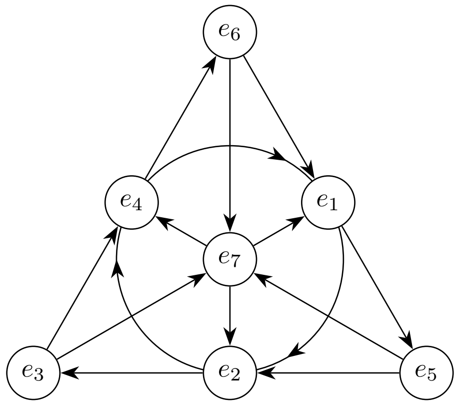
Oikeastaan kaikkien näiden samuuksien sijasta pitäisi aluksi puhua isomorfisuuksista. Nimittäin $\mathbb{Z}_2^3$:n alkiot ovat jonoja (α,β,γ), missä $\alpha,\beta,\gamma \in \{0,1\}$, kun taas E:n alkiot ovat jonoja $(\alpha_0,\dots,\alpha_7)$, missä yksi $\alpha_k = 1$ ja muut ovat nollia. Mutta koska E ja $\mathbb{Z}_2^3$ ovat isomorfisia (f on isomorfismi), niin ne voidaan samastaa. Isomorfisuus tarkoittaa tässä, että $f(x \oplus y) = f(x) + f(y)$ ja $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ kaikilla $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$.

Vektoriavaruuden $\mathbb{Z}_2^3$ aliavaruuksien virittämät $\mathbb{O}$:n alialgebrat vastaavat algebroja $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ja $\mathbb{O}$. Näimme edellä, että "tason" $\{1, e_2, e_3, e_5\}$ virittämä $\mathbb{O}$:n alialgebra on isomorfinen $\mathbb{H}$:n kanssa. Sama koskee (perustele) $\mathbb{Z}_2^3$:n muiden "origon kautta kulkevien tasojen" virittämiä $\mathbb{O}$:n alialgebroja. Vastaavasti on helppo huomata (miten?), että $\mathbb{Z}_2^3$:n jokaisen "origon kautta kulkevan suoran" (esimerkiksi $\{1, e_3\}$) virittämä $\mathbb{O}$:n alialgebra on isomorfinen $\mathbb{C}$:n kanssa ja että $\mathbb{Z}_2^3$:n "origon" (tai origosta koostuvan 0-ulotteisen aliavaruuden $\{1\}$) virittämä $\mathbb{O}$:n alialgebra on isomorfinen $\mathbb{R}$:n kanssa. "Koko $\mathbb{Z}_2^3$:n" virittämä alialgebra on tietenkin koko $\mathbb{O}$.

Olemme käsitelleet struktuureja $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ja $\mathbb{O}$ reaalikertoimisina (eli skalaarikunnan $\mathbb{R}$ omaavina) algebroina, jolloin $\mathbb{R}$ on yksi-, $\mathbb{C}$ kaksi-, $\mathbb{H}$ neli- ja $\mathbb{O}$ kahdeksanulotteinen. Näkökulmamme on "lineaarialgebrallinen" sikäli, että lähtökohtamme oli vektoriavaruus. "Algebrallisesta näkökulmasta" $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ ovat *kuntia* sekä $\mathbb{H}$ on *vinokunta*. (Nämä käsitteet, ks. esim. [9].)

Fanon[1] taso

Olemme tulkinneet perusoktoniot vektoriavaruuden $\mathbb{Z}_2^3$ alkioina eli geometrisesti kolmiulotteisen 0-1-avaruuden pisteinä. Tarkastelemme nyt perusoktonioiden $e_1,\dots,e_7$ (emme siis ota mukaan perusoktoniota 1) toista geometrista tulkintaa. Esitämme nämä oktoniot tason pisteinä. Jos $e_re_s = e_t$, niin piirrämme nuolen pisteestä e_r pisteeseen e_s ja pisteestä e_s pisteeseen e_t. Näin saamme *Fanon tason.*



[1] Gino Fano (1871 – 1952), italialainen matemaatikko.

Se on yksinkertainen *äärellinen geometria.* Pisteitä on seitsemän, nimittäin $e_1, \ldots, e_7$. Myös suoria on seitsemän, kun määrittelemme, että kolme pistettä ovat samalla suoralla, jos ne voidaan varustaa indekseillä r, s ja t niin, että $e_r e_s = e_t$. Esimerkiksi e_2, e_3 ja e_5 ovat samalla suoralla, koska $e_5 e_2 = e_3$. Täten suorina ovat tasasivuisen kolmion kolme sivua, kolme korkeusjanaa ja sisään piirretty ympyrä. (Täsmällisemmin: Suorat koostuvat niistä E:n pisteistä, jotka ovat näillä.)

Mutta voimmeko kutsua ympyrää suoraksi? Voimme, koska on olemassa muitakin geometrioita kuin tavanomainen Eukleideen geometria, eikä niissä pisteiden ja suorien tarvitse olla mielikuviemme mukaisia. Kun geometria rakennetaan aksiomaattisesti, niin pisteet ja suorat ovat *perusolioita,* jotka jätetään määrittelemättä. Pisteiden joukon P ja suorien joukon L alkioiden välillä määritellään tietyt aksioomat toteuttava *insidenssirelaatio* I. Jos piste p ja suora l ovat keskenään tässä relaatiossa eli jos $p\,I\,l$, niin sanotaan havainnollisesti, että "piste p on suoralla l" tai "suora l kulkee pisteen p kautta". (Relaation yleinen määritelmä, ks. esim. [6].) Insidenssirelaation aksioomat ovat

(i_1) Kaikilla $p \in P$ on sellaiset $l, m \in L$ $(l \neq m)$, että $p\,I\,l$ ja $p\,I\,m$. (Jokaisen pisteen kautta kulkee ainakin kaksi suoraa.)

(i_2) Kaikilla $l \in L$ on sellaiset $p, q \in P$ $(p \neq q)$, että $p\,I\,l$ ja $q\,I\,l$. (Jokaisella suoralla on ainakin kaksi pistettä.)

(i_3) Kaikilla $p, q \in P$ $(p \neq q)$ on täsmälleen yksi sellainen $l \in L$, että $p\,I\,l$ ja $q\,I\,l$. (Jokaisen kahden pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi suora.)

Fanon taso toteuttaa selvästi nämä aksioomat.

Projektiivinen taso

Jos insidenssiaksioomassa (i_1) "piste" muutetaan "suoraksi" ja päinvastoin, niin saadaan (i_2). Siksi sanotaan, että nämä aksioomat ovat keskenään *duaalisia.* Geometria noudattaa *duaalisuusperiaatetta,* jos sen jokaista aksioomaa vastaa duaalinen aksiooma. Aksioomilla (i_1), (i_2) ja (i_3) saadussa geometriassa tämä periaate ei ole voimassa, koska (i_3):lla ei ole duaalista aksioomaa.

Eukleideen tasogeometria ei noudata duaalisuusperiaatetta. Jokaisen kahden pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi suora. Sen sijaan kahdella suoralla on täsmälleen yksi yhteinen piste, jos ja vain jos suorat ovat erisuuntaisia. Yhdensuntaisilla suorilla ei ole yhtään yhteistä pistettä. Duaalisuusperiaatetta noudattavassa geometriassa ei siis saa olla yhdensuuntaisia suoria. Asia voidaan korjata lisäämällä jokaiseen suoraan *äärettömyyspiste* eli "ideaalipiste" niin, että kahdella suoralla on sama äärettömyyspiste, jos ja vain jos suorat ovat yhdensuuntaisia. Yhdensuuntaiset suorat siis leikkaavat toisensa äärettömyyspisteessään. Lisätään myös *äärettömyyssuora* eli "ideaalisuora", jonka muodostavat kaikki äärettömyyspisteet. Näin (i_3) pysyy voimassa, ja myös sen duaalinen aksiooma on voimassa. Tästä lähtökohdasta saadaan tavanomainen *projektiivinen tasogeometria* (tarkemmin ks. esim. [10]).

Myös äärellisiä projektiivisia geometrioita voidaan tutkia (tarkemmin ks. esim. [4]). Olkoon $n \geq 2$. Olkoot P ja L sellaisia joukkoja, joissa on $n^2 + n + 1$ alkiota. Kertaluvun n *(äärellinen) projektiivinen taso* saadaan, kun insidenssirelaation I määrittelevät aksioomat

(i_1') Kaikilla $p \in P$ on täsmälleen $n+1$ sellaista alkiota $l \in L$, että $p\,I\,l$. (Jokaisen pisteen kautta kulkee täsmälleen $n+1$ suoraa.)

(i_2') Kaikilla $l \in L$ on täsmälleen $n+1$ sellaista alkiota $p \in P$, että $p\,I\,l$. (Jokaisella suoralla on täsmälleen $n+1$ pistettä.)

(i_3') Kaikilla $p, q \in P$ $(p \neq q)$ on täsmälleen yksi sellainen $l \in L$, että $p\,I\,l$ ja $q\,I\,l$. (Jokaisen kahden pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi suora.)

(i_4') Kaikilla $l, m \in L$ $(l \neq m)$ on täsmälleen yksi sellainen $p \in P$, että $p\,I\,l$ ja $p\,I\,m$. (Jokaisella kahdella suoralla on täsmälleen yksi yhteinen piste.)

Nämä aksioomat eivät ole *riippumattomia*, sillä osa seuraa muista (mitkä ja miten?). Ne voitaisiin poistaa aksioomista ja esittää *teoreemoina* eli *lauseina.* Symmetriasyistä emme kuitenkaan tee niin.

Fanon taso on 2. kertaluvun projektiivinen taso. Jos n on alkuluvun potenssi, niin on olemassa n. kertaluvun projektiivinen taso. Esitämme tämän todistamisen periaatteen.

Olkoon K äärellinen kunta, jossa on n alkiota. Tarkastelemme vektoriavaruutta K^3. Muodostamme geometrian, jonka pisteinä ovat K^3:n origon kautta kulkevat suorat (eli 1-ulotteiset aliavaruudet) ja suorina origon kautta kulkevat tasot (eli 2-ulotteiset aliavaruudet). Piste on suoralla, jos vastaava 1-ulotteinen aliavaruus sisältyy vastaavaan 2-ulotteiseen aliavaruuteen. Ensimmäinen kuvio havainnollistaa tätä tapauksessa $n = 2$.

(Kuvio saattaa antaa aiheen ihmetellä esimerkiksi sitä, miksi e_1:n virittämä $\mathbb{Z}_2^3$:n suora $\{1, e_1\}$ sisältyy e_2:n ja e_4:n virittämään $\mathbb{Z}_2^3$:n tasoon. Tämän tason muodostavat lineaarikombinaatiot $0e_2 \oplus 0e_4 = 1 \oplus 1 = 1$, $0e_2 \oplus 1e_4 = 1 \oplus e_4 = e_4$, $1e_2 \oplus 0e_4 = e_2 \oplus 1 = e_2$ ja $1e_2 \oplus 1e_4 = e_2 \oplus e_4 = e_1$, joten taso on $\{1, e_1, e_2, e_4\}$. Vektoriavaruuden $\mathbb{Z}_2^3$ kaikki tasot eivät siis vastaa geometrista mielikuvaamme tasosta.)

Osoittautuu, että näin saadaan projektiivinen taso. Täten ongelma palautuu kysymykseen äärellisen kunnan alkioiden lukumäärästä. Voidaan todistaa (ks. esim. [3]), että on olemassa n-alkioinen äärellinen kunta, jos (ja vain jos) n on alkuluvun potenssi.

Käänteinen ongelma (eli ovatko kaikkien projektiivisten tasojen kertaluvut alkuluvun potensseja) on avoin.

Steinerin[1] kolmikot. Kirkmanin[2] kolmikot

Fanon taso on pienin *Steinerin kolmikko.* Tietyt Steinerin kolmikot ovat *Kirkmanin kolmikoita.* Alunperin aioin käsitellä näitä molempia kolmikoita, jolloin tie oktonioista *Kirkmanin koulutyttöongelmaan* olisi kuljettu alusta loppuun. Tämän ongelman taas halusin mukaan, jotta saisin otsikkoon "seksiä" lukijoiden houkuttelemiseksi. Tosin "seksiaddikti" pettyy sikäli, että kysymyksessä on täysin kunniallinen kombinatorinen ongelma.

Koska kirjoituksestani alkoi tulla kohtuuttoman pitkä, niin muutin suunnitelmaani ja päätin vain mainita Steinerin ja Kirkmanin kolmikot. Niiden määritelmät, ks. esim. [4], [13].

Kirkmanin koulutyttöongelma

Kirkman julkaisi 1850 *Lady's and Gentleman's Diary* -lehdessä seuraavan ongelman.

> *Viisitoista koulutyttöä kävelee ulkona seitsemänä päivänä kolmittaisissa riveissä. Järjestettävä heidät niin, että jokainen on jokaisen kanssa samassa rivissä täsmälleen kerran.*

Hän oikeastaan vaati (näennäisesti lievemmin, mutta tosiasiassa yhtäpitävästi), ettei kukaan ole kenenkään kanssa useammin kuin kerran. Edelleen hän puhuessaan "koulutytöistä" oikeastaan käytti hieman erivivahteista ilmaisua "young ladies of a school", mutta ennen pitkää se muuttui kirjallisuudessa muotoon "schoolgirls".

Kirkman oli opiskellut matematiikkaa yliopistossa muiden opintojensa ohella, mutta hän aloitti matematiikan tutkimisen vasta 40-vuotiaana. Vaikka hän oli tavallaan harrastelijamatemaatikko, hän teki hyvää tutkimusta (ks. [2] ja solmuteorian osalta myös [12]). Kuitenkin matematiikan "historiallisessa muistissa" Kirkmanin nimi taitaa esiintyä, jos lainkaan, niin "koulutyttöongelman" keksijänä. Biggs [2] (ks. myös [11]) kirjoittaa seuraavaa.

"On valitettavaa, että noin mitättömän jutun piti varjostaa niitä monia paljon merkittävämpiä kontribuutioita, joita sen kirjoittaja tuli tekemään matematiikkaan. Kuitenkin se on hänen pysyvin muistomerkkinsä."

Ongelman ratkaisu, ks. esim. [4], [13]. Cameron [4] panee tytöt pelaamaan jääkiekkoa!

Kirkman jatkoi matematiikan tutkimista ja harrastamista koko loppuelämänsä. Vielä 88-vuotiaana, pari kuukautta ennen kuolemaansa, hän lähetti tehtäviä ja ratkaisuja *Educational Times* -lehteen. Siinä on esikuvaa meille ikääntyville matemaatikoille! Monet matemaatikot ovat parhaimmillaan melko nuorina, mutta tekemistä riittää tällä alalla kaiken ikäisille.

Kiitokset

Kiitän Sirkka-Liisa Erikssonia, Markku Halmetojaa, Pentti Haukkasta, Markku Niemenmaata ja Timo Tossavaista heidän käsikirjoituksestani tekemistään huomautuksista tai muusta saamastani avusta.

Viitteet

[1] J. C. Baez, The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc. 39* (2002), 145 – 205.

[2] N. L. Biggs, T. P. Kirkman, Mathematician. *Bull. London Math. Soc. 13* (1981), 97 – 120.

[3] G. Birkhoff and S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra.* 5th Ed. Macmillan, 1996.

[4] P. J. Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms.* Cambridge Univ. Press, 1994.

[5] J. Merikoski, Kompleksiluvuista ja kvaternioista. Solmu 3/2001.

[6] J. Merikoski, A. Virtanen ja P. Koivisto, Johdatus diskreettiin matematiikkaan. Kokeilumoniste. Tampereen yliopisto, matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, 2003.

[7] J. Merikoski, K. Väänänen ja T. Laurinolli, *Matematiikan taito 11: Lukuteoria ja logiikka.* Weilin+Göös, 1995.

[8] J. Merikoski, K. Väänänen, T. Laurinolli ja T. Sankilampi, *Matematiikan taito 15: Lineaarialgebra.* Weilin+Göös, 1998.

[1] Jakob Steiner (1796 – 1863), sveitsiläinen matemaatikko.

[2] Thomas Kirkman (1806 – 1895), englantilainen kirkkoherra.

[9] T. Metsänkylä ja M. Näätänen, *Algebra.* Limes ry, 2003.

[10] R. Nevanlinna, *Geometrian perusteet.* WSOY, 1973.

[11] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, Thomas Penyngton Kirkman. http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/˜history/Mathematicians

[12] A. Sossinsky, *Solmut. Erään matemaattisen teorian synty.* Suomeksi toimittanut Osmo Pekonen. Art House, 2002.

[13] E. Weisstein, Eric Weisstein's world of mathematics. Wolfram Research. http://www.mathworld.wolfram.com