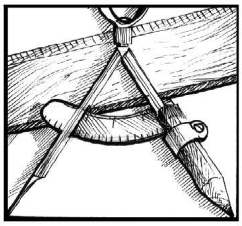


Suorat, käyrät ja kaarevuus

Jukka Tuomela
Professori
Matematiikan laitos, Joensuun yliopisto

Suora?

Tämä kirjoitus on eräänlainen jatko Timo Tossavaisen suoran määritelmää koskevaan kirjoitukseen Solmun numerossa 2/2002. Tossavainen oli löytänyt monia erilaisia yrityksiä selittää suoran syvintä olemusta. Ehkäpä eräs syy suoran määrittelemisen vaikeuteen on ollut ajatus, että on vain yksi "oikea" tapa määritellä suora. Historiallisesti tämä on ymmärrettävää: pitkäänhän pidettiin selvänä, että Eukleideen geometria kuvaa tarkasti fysikaalista avaruutta, joten tuntui kenties luonnolliselta, että pitäisi olla olemassa yksikäsitteinen "fysikaalisesti" oikea määritelmä.

Kun sitten 1800-luvulla keksittiin/löydettiin "vaihtoehtoisia" geometrioita,[1] niin luonnollisesti suoran käsite näissä eri geometrioissa oli erilainen, eivätkä suorien ominaisuudet aina vastanneet tavallisen intuition odotuksia. Tämä on nykyisin tuttua matemaatikoille, jotka ovat tottuneet määrittelemään asioita aksiomien avulla. On kuitenkin vahinko, jos kouluissa tai tietosanakirjoissa ei voida ymmärrettävästi selittää mikä on suora.

Lähestyn seuraavassa asiaa differentiaalilaskennan avulla. Kirjoituksen loppuun olen kerännyt muutamia lisäselityksiä tietyistä asioista. Nämä kuitenkin vain täydentävät tekstiä, eivätkä ole välttämättömiä kirjoituksen yleisidean ymmärtämisen kannalta.

Kirjoituksen toisessa osassa sitten katsotaan mihin päädytään, kun tarkastellaan suoria "kaarevissa" (epäeuklidisissa) avaruuksissa.

Hilbert ja Eukleides

Selvitetään aluksi muutama asia, jotka voivat aiheuttaa sekaannusta. Eukleideen kirjan [3] alussa on *määritelmiä* (definitions), *oletuksia* (postulates) ja *aksiomia* (axioms). Tämä jako on jossain mielessä mielivaltainen eikä aina vastaa nykyistä kielenkäyttöä. Esimerkiksi määritelmässä 12 todetaan, että jos kulma on pienempi kuin suora kulma, niin sitä sanotaan teräväksi kulmaksi. Kyseessä on siis vain erään termin käyttöönotto. Suoraa kuvaillaan 4. määritelmässä [3, s. 3]:[2]

[1] Tosin Desargues ennakoi projektiivisen geometrian tuloa jo 1600-luvulla:

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Desargues.html
http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/chrono1/Desargues.html

[2] Verkosta löytyy erilaisia versioita Eukleideen kirjasta:

(m) *A straight line is that which lies evenly between its extreme points.*[3]

Mutta tämä "määritelmä" on itse asiassa turha: tähän ei koskaan vedota myöhemmin kirjassa. Toisin sanoen sen voisi poistaa tarpeettomana.[4] Todellinen suoran määritelmä on esitetty oletuksissa [3, s. 5]:

(e1) *Let it be granted,*
1. That a straight line may be drawn from any one point to any other point.

Kriittinen lukija huomaa, että tässä oikeastaan puhutaan janasta. Eukleideen aikaan ei käsitelty äärettömän pitkiä suoria, vaan jokaisella suoralla/janalla oli alku- ja loppupiste (tämä käy ilmi jo määritelmästä (m)). Suoria/janoja pystyttiin kuitenkin jatkamaan mielivaltaisen pitkiksi. Tästä piti huolen toinen oletus:

(e2) *[Let it be granted,]*
2. That a terminated straight line may be produced to any length in a straight line.

Näihin sitten vedotaan kun myöhemmin todistetaan lauseita.

Hilbertin kuvaus Eukleideen geometriasta lähtee siitä, että taso on eräs joukko, pisteet ovat tämän joukon alkioita ja suorat tämän joukon eräitä osajoukkoja. Tämän jälkeen Hilbert antaa listan aksiomia, jotka pisteet, suorat ja taso toteuttavat. Hyvä (= luettava) esitys tästä lähestymistavasta löytyy Hartshornen kirjasta [1]. Eräs Hilbertin aksiomista on [1, s. 66]:

(h) *For any two distinct points A, B, there exists a unique line l containing A, B.*

Voitaisiin siis sanoa, että (e1) (tai (e1) ja (e2) yhdessä) vastaa määritelmää (h). Koska (m) on tarpeeton, ei Hilbertin tarvitse yrittääkään sel(v)ittää mitä se tarkoittaa.

Luonnollisesti Hilbert ei pyrkinytkään suurelle yleisölle tarkoitettuun esitykseen, vaan tavoitteena oli esittää Eukleideen geometria siten, että otetaan vain ne aksiomat jotka ovat todella välttämättömiä, ja lisäksi pyritään osoittamaan, että aksiomat eivät johda ristiriitaan. Toisaalta, jos otetaan vain osa Hilbertin aksiomista, niin saadaan Eukleideen geometriasta poikkeavia geometrioita, esimerkiksi *äärellisiä geometrioita*, joissa "tasossa" on vain äärellinen määrä pisteitä. Myös tätä on selvitetty edellä mainitussa Hartshornen kirjassa.

Vaikka Hilbertin aksiomaattinen lähestymistapa geometriaan oli omalla tavallaan tärkeä, niin asiaa voisi lähestyä toisinkin. Lähtökohtana on, ettei tarvitse yrittää löytää määritelmää, jonka Eukleides periaatteessa olisi voinut keksiä, vaan voidaan vapaasti käyttää mitä tahansa sopivia työkaluja. Toisin sanoen yritetään *mallittaa* intuitiivisia käsitteitä piste, suora ja taso jollain tavalla, eikä murehdita (ainakaan liikaa!) sitä vastaako tämä Eukleideen geometriaa vai ei. Tämä lienee järkevää myös matematiikan opetuksen kannalta.

Lukija voi esimerkiksi todeta, että Eukleideen toisen kirjan 7. lause todistaa, että

$$(a+b)^2 + b^2 = a^2 + 2(a+b)b$$

Myös monet 5. luvun lauseet ovat helppoja kun ne ensin algebrallistaa, mutta jo geometrisen muotoilun ymmärtäminen (saati sitten pitkän todistuksen läpikahlaaminen) on vaivalloista.

Katsotaan seuraavassa mihin päädytään, kun otetaan differentiaalilaskenta käyttöön.

Piste, käyrä ja taso

Joukko-opista ei pääse mihinkään: taso on jokin joukko, ja pisteet kyseisen joukon alkioita. Ensin siis pitää päättää, mikä on se joukko missä pisteet asustavat, eli missä joukossa kaikki toiminta tapahtuu. Valitaan perusavaruudeksi *karteesinen taso* $\mathbb{R}^2$. Jokainen piste voidaan siis esittää kahden *koordinaatin* avulla: merkitään $p = (p_x, p_y)$. Määritellään seuraavaksi yleinen käyrän käsite, ja tämän jälkeen pyritään määrittelemään suora käyränä, jolla on tiettyjä erikoisominaisuuksia. Asetetaan:

Käyrä on (sileä) kuvaus $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

Siis "hetkellä" t ollaan pisteessä $c(t) = \big(c_1(t), c_2(t)\big)$, ja sileys tarkoittaa, että koordinaattifunktiot c_1 ja c_2 ovat riittävän monta kertaa jatkuvasti derivoituvia.[5] Tämähän on oleellisesti Tossavaisen siteeraama Neovius-Nevanlinnan määritelmä:

http://thales.vismath.org/euclid/vee/
http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/byrne.html
http://aleph0.clarku.edu/∼djoyce/java/elements/elements.html

[3] Vanhoissa englanninkielisissä geometrian kirjoissa "line" tarkoitti käyrää (nykyisin "curve"). Suora/jana oli sitten "straight line".

[4] Muistelen, että on kiistelty siitä, onko tämä määritelmä todella Eukleideelta, vai onko se lisätty siihen myöhemmin.

[5] Luonnollisesti usein riittää vaikkapa yksi jatkuva derivaatta, mutta tämän kirjoituksen kannalta ei ole oleellista ruveta laskemaan kuinka monta jatkuvaa derivaattaa tarvitaan.

> Liikkeessä olevan pisteen muodostamaa uraa sanotaan viivaksi.[6]

Luonnollisesti usein käyrää ajatellaan kyseisen kuvauksen kuvajoukkona eli ”kuvauksen muodostamana urana”, mutta nykyisin on tapana määritellä käyrä nimenomaan kuvauksena. Kuvauksen määrittelyjoukko voi myös olla jokin sopiva reaaliakselin osajoukko, esimerkiksi väli $[0,1]$. Huomattakoon, että Eukleideen geometrian tai Hilbertin systeemin yhteydessä ei voida puhua yleisen käyrän käsitteestä.

Nyt voidaankin jo antaa ensimmäinen suoran määritelmä

(i) *Olkoon annettu kaksi tason pistettä p ja q. Näitten kautta kulkeva suora on*

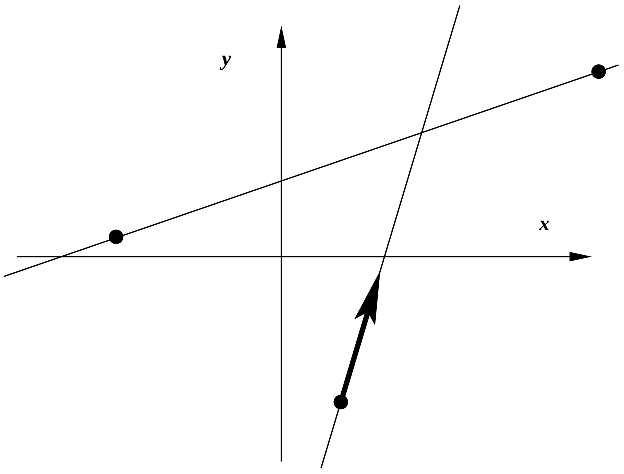
$$c(t) = (1-t)p + t\,q$$

Siis kahden mielivaltaisen pisteen kautta voidaan ”piirtää” suora.

(ii) *Olkoon annettu tason piste p ja vektori v. Pisteen p kautta kulkeva vektorin v suuntainen suora on*

$$c(t) = p + t\,v$$

Siis annetusta pisteestä voidaan ”piirtää” suora mielivaltaiseen suuntaan.



Kuva 1. Suora voidaan määritellä joko kahden pisteen tai pisteen ja suunnan avulla.

Selvästi molemmat versiot määrittelevät saman kuvausjoukon. Erona on vain, mikä ”data” kiinnittää yhden kuvauksen tässä joukossa. Määritelmä (i) on luonteeltaan reuna-arvotehtävä: on annettu kaksi pistettä, ja halutaan suora näiden välille. Määritelmä (ii) on taas alkuarvotehtävä: on annettu alkupiste ja alkusuunta. Eukleideen muotoilu (e1) ei ole selkeästi kumpikaan näistä.

Nyt voitaisiin jana määritellä suorana, jonka määrittelyjoukko olisi jokin suljettu väli $[a,b]$. Jatkossa en kuitenkaan jää pohtimaan, olisiko jossain kohtaa ”jana” parempi termi kuin ”suora”, vaan käytän vain sanaa suora.

Määritelmissä (i) ja (ii) identifioidaan tavalliseen tapaan tarpeen mukaan pisteet ja vektorit.[7] Selvästi siis määritelmä ei ole Eukleideen geometrian hengen mukainen, vaan tässä vedotaan vektorien yhteenlaskuun ja skalaarilla kertomiseen, siis vektoriavaruuden rakenteeseen.

Huomattakoon, että Neovius-Nevanlinnan määritelmä

> suoraksi sanotaan semmoista viivaa, joka ei muuta asemaansa pyöriessään siten, että sen kaksi pistettä pysyy paikallaan

vetoaa myös vektorilaskentaan: tässähän suora on avaruuden kierron (siis lineaarikuvauksen) pyörähdysakseli (kuvauksen invariantti aliavaruus)! Tarkempi muotoilu löytyy Lemmasta 1.

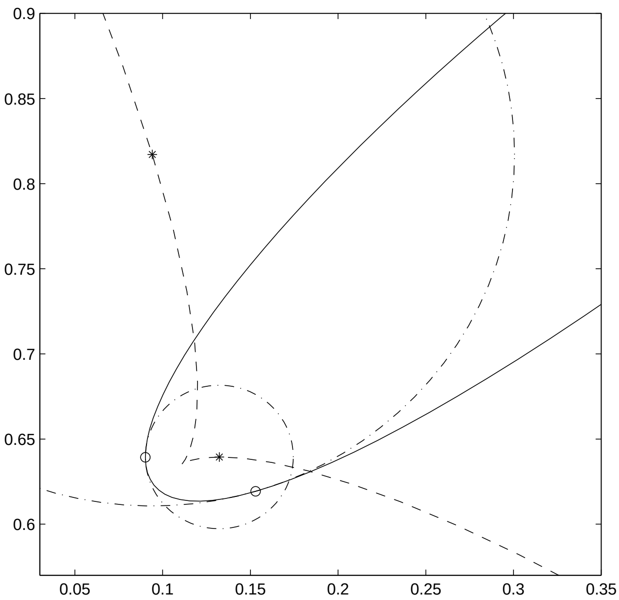
Määritelmät (i) ja (ii) yleistyvät sellaisenaan useampiulotteisiin avaruuksiin: $\mathbb{R}^2$ vain korvataan avaruudella $\mathbb{R}^n$. Suorat voidaan kuitenkin karakterisoida toisellakin tavalla. Tätä karakterisointia voidaan käyttää paljon muissakin tapauksissa kuin avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Suorin tie

Jos kaksi käyrää/polkua lähtee pisteestä p, niin miten voidaan sanoa kumpi niistä on ”suorempi”? Jotta tähän voisi vastata, pitäisi voida mitata käyrän kaareutumista jollain tavalla. Tähän on (ainakin) kaksi erilaista lähestymistapaa. Ensinnäkin ympyrä kaareutuu sitä ”jyrkemmin” mitä pienempi sen säde on. Voitaisiin siis annetun käyrän tietyn pisteen ympäristössä etsiä sellainen ympyrä, joka ”mahdollisimman tarkasti” yhtyisi kyseiseen käyrään. Näin saatua ympyrää kutsutaan oskuloivaksi ympyräksi, joka Spivakin [2, s. 7] mukaan tarkoittaa suutelevaa ympyrää, katso Lemma 3. Suutelevan ympyrän säde puolestaan antaa sitten tietoa käyrän kaareutumisesta.

[6] Ennen käytettiin sanaa viiva eikä käyrä.

[7] Jätän lukijan pohdittavaksi, olisiko tämän ”kaksoistulkinnan” eliminoiminen opetuksen kannalta toivottavaa, järkevää tai mahdollista.



KUVA 2. Eräs käyrä ja sen kaksi suutelevaa ympyrää. Katkoviivalla on merkitty suutelevien ympyröitten keskipisteitten muodostamaa käyrää eli *evoluuttaa*.

Toinen tapa on tarkastella tangenttivektorin suunnan muuttumista. Molemmat johtavat samaan lopputulokseen; seurataan tässä jälkimmäistä strategiaa. Tarvitaan siis tangentin käsitettä. Jos käyrää ajatellaan Neovius–Nevanlinnan mukaisesti liikkeessä olevana pisteenä, niin tangentti(vektori) on silloin pisteen nopeus(vektori). Tämä antaa aiheen uskoa, että käyrän tangentti voidaan määritellä derivaatan avulla. Tässä tarvitaan kuitenkin sileyden lisäksi seuraava oletus:

Käyrä on säännöllinen, jos $c'(t) \neq 0$ kaikilla t. Tällöin $c'(t)$ on käyrän tangentti(vektori)[8] *pisteessä $c(t)$.*

Palautetaan tässä välissä mieliin muutamia merkintöjä. Kahden vektorin $u = (u_1, u_2)$ ja $v = (v_1, v_2)$ pistetulo on

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

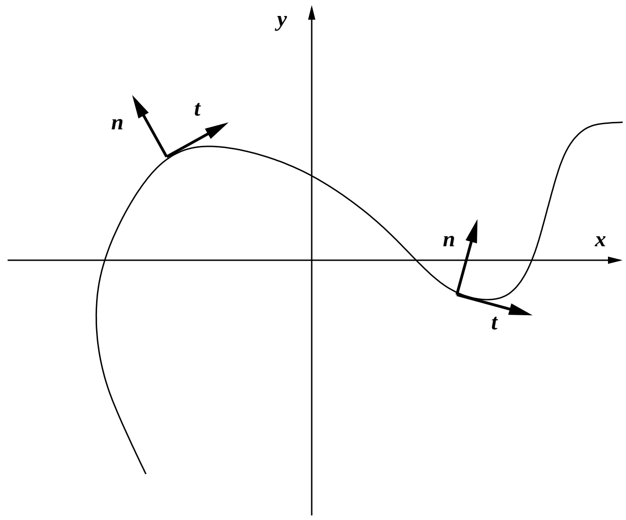
Muistetaan edelleen, että vektorit ovat kohtisuorassa (ortogonaalisia), jos niitten välinen pistetulo on nolla. Vektorin $v = (v_1, v_2)$ pituus on $|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Seuraava tekninen oletus on usein hyödyllinen:

Käyrä on parametrisoitu kaarenpituudella, jos $|c'(s)| = 1$ kaikilla s.

Voidaan osoittaa, ettei tämä rajoita yleisyyttä: kaikki säännölliset käyrät voidaan parametrisoida uudelleen siten, että ne toteuttavat ylläolevan ehdon, katso Lemma 2. Merkitään edelleen $\mathbf{t}(s) = c'(s)$: tämä on siis käyrän (yksikkö)tangentti. Käyrän (yksikkö)normaaliksi valitaan

$$\mathbf{n}(s) = \big(-c_2'(s), c_1'(s) \big)$$

Nyt on sekä tangentti että normaali normalisoitu: $|\mathbf{t}(s)| = |\mathbf{n}(s)| = 1$ kaikilla s. Tangentti ja normaali muodostavat ortonormaalin koordinaatiston, joka liikkuu käyrän mukana: tällaista liikkuvaa koordinaatistoa sanotaan joskus *kehykseksi* (engl. frame tai moving frame).



KUVA 3. Käyrän mukana liikkuva koordinaatisto eli kehys.

Tavoitteena on siis tarkastella tangentin suunnan muutoksia, ja sitä kautta mitata käyrän kaareutumista. Koska derivaatta kuvaa muutosta, niin derivoidaan yhtälö $|\mathbf{t}(s)|^2 = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 1$ puolittain:

$$\frac{d}{ds}\, \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = \mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) + \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) = 2\, \mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$$

Koska $\mathbf{t}'(s)$ ja $\mathbf{t}(s)$ ovat kohtisuorassa, niin vektorin $\mathbf{t}'(s)$ täytyy olla normaalin suuntainen. On siis olemassa jokin funktio κ siten, että

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \mathbf{n}(s)$$

Yllä määriteltyä funktiota κ sanotaan käyrän c kaarevuudeksi.

Harjoitustehtäväksi lukijalle jätän sen osoittamisen, että $\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s)$. Huomaa, että kaarevuus voi olla sekä positiivinen että negatiivinen. Merkki kuvaa sitä kääntyykö käyrä vasemmalle vai oikealle. Laskemalla pituudet saadaan

$$|c''(s)| = |\mathbf{t}'(s)| = |\kappa(s)\mathbf{n}(s)| = |\kappa(s)||\mathbf{n}(s)| = |\kappa(s)|$$

[8]Luonnollisesti tangentista puhuttiin jo kauan ennen differentiaalilaskennan keksimistä, joten tässä voisi pohtia, onko vektorin $c'(t)$ kutsuminen tangentiksi määritelmä vai lause.

Käyrän kaarevuus määriteltiin käyttämällä tason koordinaatteja. Lopputulos on kuitenkin riippumaton koordinaateista siinä mielessä, että tason siirrot ja kierrot[9] eivät muuta kaarevuutta. Toiseenkin suuntaan voidaan mennä: jos on annettu jokin funktio κ, alkupiste p (siirto), alkusuunta v (kierto), niin tätä vastaa yksikäsitteinen (kaarenpituudella parametrisoitu) käyrä, jonka kaarevuus on κ.

Joka tapauksessa nyt voidaan määritellä:

(iii) *suora on käyrä, jonka kaarevuus on nolla*

Antaako tämä saman suorajoukon kuin määritelmät (i) ja (ii)? Yhtälön () mukaan

$$|\kappa(s)| = \sqrt{c_1''(s)^2 + c_2''(s)^2} = 0 \;\Rightarrow\; c_1''(s) = c_2''(s) = 0$$

Saatiin siis kaksi lineaarista toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä. Näitten ratkaisut saadaan integroimalla yhtälöitä $c_i''(s) = 0$ kaksi kertaa:

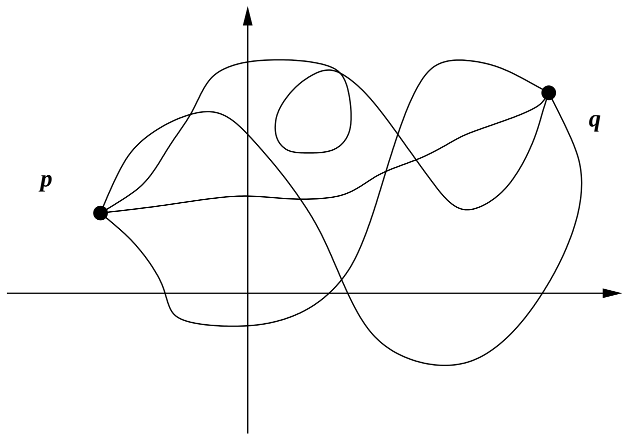
$$c_1(s) = a_1 + b_1 s \quad \text{ja} \quad c_2(s) = a_2 + b_2 s$$

Tässä a_i ja b_i ovat mielivaltaisia vakioita. Merkitsemällä $a = (a_1, a_2)$ ja $b = (b_1, b_2)$ voidaan ratkaisu esittää vektorimuodossa $c(s) = a + bs$. Ratkaisu on siis samaa muotoa kuin määritelmässä (ii), joten on luonnollista kiinnittää jokin tietty ratkaisu valitsemalla alkupiste a ja alkusuunta b.

Aivan samoin voidaan tutkia käyriä myös avaruudessa $\mathbb{R}^n$: tässäkin tapauksessa kaarevuuden häviämisestä seuraa, että käyrä onkin suora. Suorat voidaan kuitenkin määritellä vielä eräällä tavalla.

Lyhin tie

Olkoon annettu kaksi tason pistettä p ja q. Selvästi on äärettömän monta polkua pisteestä p pisteeseen q, toisin sanoen käyrää, jonka alkupiste on p ja loppupiste on q.



KUVA 4. Polkuja pisteestä p pisteeseen q.

Rajoitutaan seuraavassa yksinkertaisuuden vuoksi käyriin, jotka voidaan esittää yhtälönä $y = f(x)$, siis käyriin jotka ovat muotoa $c(t) = \big(t, f(t)\big)$. Olkoon edelleen $p = (a, y_0)$ ja $q = (b, y_1)$, missä $a < b$. Merkitään edelleen V_{pq}:llä kaikkien välillä $[a, b]$ määriteltyjen sileitten funktioitten joukkoa, joille pätee $f(a) = y_0$ ja $f(b) = y_1$.

Halutaan löytää lyhin polku p:n ja q:n välillä. Olkoon $f \in V_{pq}$; tällöin siis

$$c(a) = (a, f(a)) = (a, y_0) = p$$

ja

$$c(b) = (b, f(b)) = (b, y_1) = q$$

Käyrän pituus saadaan kaavalla

$$J(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx, \quad J : V_{pq} \to \mathbb{R}$$

Huomaa, että J on kuvaus funktiojoukolta V_{pq} reaaliluvuille; tässä mielessä f on joukon V_{pq} "piste". Halutaan löytää f jolla J saa minimiarvon. Differentiaalilaskennasta tiedämme, että kun tutkitaan maksimi- ja minimitehtäviä, niin kannattaa etsiä derivaatan nollakohdat. Kirjoituksen lopussa on tarkemmin johdettu tämä, mutta lopputuloksena on, että

$$\frac{dJ}{df} = 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 0$$

Merkintä $\frac{dJ}{df}$ ei ole standardi, vaan on tarkoitettu ilmaisemaan sitä, että tässä todellakin on kyse tavallisen derivoinnin yleistyksestä.[10]

Joka tapauksessa lopputulos on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö. Yllä jo nähtiin, että yhtälön $f''(x) = 0$ ratkaisut ovat muotoa $f(x) = d_1 + d_2 x$, missä d_1

[9] siis tason isometriat.

[10] Kriittinen lukija muistaa, että derivaatan nollakohta voi antaa myös maksimeja ja satulapisteitä. Ääriarvon laatu saadaan selville vasta kun tarkastellaan toista derivaattaa.

ja d_2 ovat vakioita. Vakiot kiinnittyvät reunaehtojen $f(a) = y_0$ ja $f(b) = y_1$ avulla. Pienen laskun jälkeen saamme siis vastaukseksi, että lyhin polku pisteitten p ja q välillä voidaan esittää yhtälönä

$$y = \frac{y_1 - y_0}{b - a} x + \frac{by_0 - ay_1}{b - a}$$

Siis jälleen päädyttiin suoriin, joten saamme uuden määritelmän:

(iv) *suora on lyhin polku kahden pisteen välillä*

Tossavainen lainasi tietosanakirja-artikkelia vuodelta 1910, jonka kirjoittaja, Uno Saxén, väitti, että

> Epätyydyttävä on esim. määritelmä: suora on kahden pisteen lyhin väli, koska suoran mittaaminen edellyttää, että käsite suora on edeltäpäin selvitetty.

Tässä Saxén kuitenkin on hakoteillä: oleellista on, että *käyrän* ja käyrän pituuden käsite on selvitetty. Tämän jälkeen sitten *määritellään* suora lyhimpänä käyränä/polkuna.

Alustava tilinpäätös

Olemme nähneet, että ainakin tasossa, ja myös avaruudessa $\mathbb{R}^n$, suorimmat polut ja lyhimmät polut ovat samoja, eli lyhyesti suoria. Kaikki määritelmät (i) – (iv) johtavat siis oleellisesti samaan lopputulokseen. Tilanne ei kuitenkaan ole enää niin yksinkertainen, kun (tasainen) Eukleideen geometria yleistetään (kaarevaksi) *Riemannin geometriaksi*. Tällöin määritelmät (i) ja (ii) eivät enää ole mielekkäitä, mutta määritelmät (iii) ja (iv) ovat edelleen käyttökelpoisia. Kirjoituksen toisessa osassa perehdytään hiukan Riemannin geometriaan, ja pohditaan ovatko (iii) ja (iv) edelleen ekvivalentteja.

Muutamia lisähuomioita

Käyriä ja matriiseja

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ kierrot voidaan esittää ortogonaalisten matriisien avulla. Kaikille ortogonaalisille matriiseille pätee: $|\det(A)| = 1$.

Lemma 1. Olkoon A ortogonaalinen 3×3–matriisi ja olkoon $\det(A) = 1$. Tällöin sillä on ominaisarvo $\lambda = 1$.

Ominaisarvoa $\lambda = 1$ vastaavaa ominaisavaruutta voidaan kutsua A:n pyörähdysakseliksi. Tämä ominaisavaruus on siis Neovius-Nevanlinnan määritelmän mukainen suora.

Todistus. Tämän jätän harjoitustehtäväksi. Tarvittavat asiat löytyvät mistä tahansa matriisilaskun oppikirjasta. □

Lemma 2. Jokainen säänöllinen käyrä voidaan parametrisoida kaarenpituudella.

Todistus. Olkoon $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ säännöllinen. Olkoon edelleen

$$g(t) = \int_a^t |c'(u)| du$$

ja merkitään $g(b) = L$. Siis g on kuvaus $[a, b] \to [0, L]$. Edelleen g on bijektio koska $g'(t) = |c'(t)| > 0$. Siis on olemassa käänteiskuvaus g^{-1}. Asetetaan $\tilde{c} = c \circ g^{-1}$. Nyt on helppo tarkistaa, että $|\tilde{c}'(t)| = 1$ kaikilla t. □

Kuvausta g^{-1} ei useinkaan tunneta eksplisiittisesti, mutta osoittautuu, ettei sitä tarvitakaan: riittää tieto, että se on olemassa.

Lemma 3. Olkoon c kaarenpituudella parametrisoitu käyrä ja $p = c(s_0)$. Käyrän suuteleva ympyrä tässä pisteessä p on

$$y(t) = a + r\big(\cos(t/r), \sin(t/r)\big)$$

missä $y(t_0) = p$, $r = 1/|\kappa(s_0)|$ ja

$$a = p + \tfrac{1}{|\kappa(s_0)|}\mathbf{n}(s_0)$$

Käyrän suutelevien ympyröitten keskipisteistä muodostuu uusi käyrä, alkuperäisen käyrän *evoluutta*.

Todistus. Tarkastellaan yhtälöitä

$$\begin{aligned} c(s_0) &= p = y(t_0) \\ c'(s_0) &= y'(t_0) \\ c''(s_0) &= y''(t_0) \end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö antaa:

$$\begin{aligned} y''(t_0) &= -\tfrac{1}{r}\big(\cos(t_0/r), \sin(t_0/r)\big) \\ &= -\tfrac{1}{r^2}\big(y(t_0) - a\big) \\ &= \tfrac{1}{r^2}\big(a - p\big) = c''(s_0) \end{aligned}$$

Koska $r = |a - p|$, niin tästä jo saadaan, että $r = 1/|c''(s_0)| = 1/|\kappa(s_0)|$. Pitää vielä laskea a. Toista yhtälöä ei ole vielä käytetty:

$$\big(c_1'(s_0), c_2'(s_0)\big) = \big(-\sin(t_0/r), \cos(t_0/r)\big)$$

Tämän avulla siis

$$\begin{aligned} a &= p - r\big(\cos(t_0/r), \sin(t_0/r)\big) \\ &= p + r\big(-c_2'(s_0), c_1'(s_0)\big) \\ &= p + \tfrac{1}{|\kappa(s_0)|}\mathbf{n}(s_0) \end{aligned}$$

□

Hiukan variaatiolaskua

Olkoon V kaikkien välillä $[a,b]$ määriteltyjen sileitten funktioitten joukko ja asetetaan

$$V_{pq} = \{f \in V \mid f(a) = y_0 \text{ ja } f(b) = y_1\}$$

ja

$$V_0 = \{f \in V \mid f(a) = f(b) = 0\}$$

Etsitään sellaista funktiota $f \in V_{pq}$, jolla seuraava kuvaus $J : V_{pq} \to \mathbb{R}$ saavuttaa minimiarvon:

$$J(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Lasketaan J:n suunnattu derivaatta. Olkoon $g(s) = f(t) + s\,h(t)$, missä $f \in V_{pq}$ ja $h \in V_0$. g on siis kuvaus $g : \mathbb{R} \to V_{pq}$, ja pikainen vilkaisu suoran määritelmään (ii) osoittaa, että g on suora avaruudessa V_{pq} (ja myös avaruudessa V, koska V_{pq} on avaruuden V osajoukko). Kiinnitetään "piste" f ja "suunta" h, ja olkoon

$$J_f(s) = (J \circ g)(s) = J(f + sh)$$

Tällöin siis $J_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jos f minimoi J:n, niin J_f:llä on minimi, kun $s = 0$. Tällöin pitää päteä $J_f'(0) = 0$. Lasketaan tämä derivaatta.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{ds}J(f+sh)\\
&= \tfrac{d}{ds}\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2 + 2sf'(x)h'(x) + s^2h'(x)^2}dx\\
&= \int_a^b \frac{f'(x)h'(x) + sh'(x)^2}{\sqrt{1 + f'(x)^2 + 2sf'(x)h'(x) + s^2h'(x)^2}}dx
\end{aligned}$$

mistä edelleen osittaisintegroimalla

$$\begin{aligned}
J_f'(0) &= \int_a^b \frac{f'(x)h'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}dx\\
&= \Big/_a^b \frac{f'(x)h(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} - \int_a^b \frac{f''(x)h(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}dx\\
&= -\int_a^b \frac{f''(x)h(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}dx
\end{aligned}$$

Nyt pitää olla voimassa, että $J_f'(0) = 0$ kaikilla $h \in V_0$, mikä on mahdollista vain, jos $f''(x) = 0$. Tätä toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä kutsutaan tehtävän Eulerin (tai Eulerin ja Lagrangen) yhtälöksi. Tässä tapauksessa ratkaisut ovat siis suoria, kuten aiemmin on jo nähty.

Viitteet

[1] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.

[2] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry, vol 2, 2nd ed.*, Publish or Perish, 1979.

[3] I. Todhunter (ed.), *The elements of Euclid*, J. M. Dent & Sons Ltd, London, 1862, uusi painos: Everyman's Library, Dutton, New York, 1933.