Matematiikasta ja sen menetelmistä

Euroopan matemaattisen seuran lehden kirjoituksesta *The Methodology of Mathematics*, Ronald Brown ja Timothy Porter (kesäkuu 2001 ja syyskuu 2001) lyhentäneet ja vapaasti kääntäneet

Marjatta Näätänen* ja *Matti Lehtinen
Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

Kirjoitus perustuu esitelmään, jonka tarkoituksena on antaa opiskelijoille käsitys matematiikan pyrkimyksistä ja saavutuksista sekä näiden pohjalta herättää myös alan ansaitsemaa arvostusta ja ylpeyttäkin. Tarkoituksena on myös auttaa opiskelijoita selittämään näitä päämääriä ja saavutuksia ystävilleen ja sukulaisilleen.

Muutama peruskysymys matemaatikoille

Toivomme matematiikkaa millä tahansa tasolla opettavia miettimään, missä määrin matemaatikon koulutukseen tulisi liittyä seuraavien kysymysten käsittelyä ja arviointia.

1. Onko matematiikka tärkeää? Jos se on, niin mille, missä yhteyksissä ja miksi.
2. Mikä on matematiikan luonne muihin oppialoihin verrattuna?
3. Mitkä ovat matematiikan tutkimuskohteet?
4. Mitkä ovat matematiikan menetelmät, miten se saa aikaan tuloksensa?
5. Tutkitaanko matematiikkaa? Jos, niin kuinka paljon? Mitkä ovat tutkimuksen yleiset tavoitteet? Mitkä ovat merkittävimmät saavutukset? Miten matematiikkaa tutkitaan?
6. Millaista on hyvä matematiikka?

Voidaan väittää, että jotkin näistä kysymyksistä eivät osu kohdalleen ja että matemaatikon ei ole tarpeen tällaisia pohtia. Näitä väitteitä vastaan puolustaudumme *Albert Einsteinin* sanoilla vuodelta 1916:

”Kun käännyn tieteen puoleen ilman jotain pinnallista syytä kuten rahan ansaitseminen tai kunnianhimo, ja myöskin ilman (tai ei ainakaan yksinomaan) pelin antaman mielihyvän, aivourheilun ilojen takia, silloin seuraavien kysymysten täytyy kiinnostaa minua tutkijana palavasti: Mihin päämäärään pyrkii tiede, jonka harjoittamiselle omistaudun? Kuinka 'oikeita' ovat sen tulokset? Mikä on olennaista ja mikä vain satunnaisen kehityksen tulosta?

... Käsitteet, jotka ovat osoittautuneet hyödyllisiksi asioiden järjestämisessä saavat helposti niin suuren auktoriteetin, että unohdamme niiden maallisen alkuperän ja hyväksymme ne annettuina tosiasioina, 'a priori tilanteina' jne. Tieteen edistyksen tie tulee usein pitkiksi ajanjaksoiksi tukittua sellaisten virheiden takia. Siksi ei ole turhaa touhua käyttää kykyämme tuttujen käsitteiden analysointiin ja tuoda esiin ehdot, joista näiden käsitteiden oikeutus ja hyödyllisyys riippuu, ja miten nämä vähä vähältä kehittyivät...”

Ihmisen erottaa eläimestä kyky miettiä omaa toimintaansa ja tämä kyky vaikuttaa positiivisesti suureen osaan ihmisen toimintaa. Tähän mietiskelyyn kuuluu arvojen arviointi, jälleen – tietämämme mukaan – vain ihmiselle ominainen kyky. Miettiminen lisää yleensä toiminnan tehokkuutta, voimme analysoida, mikä on oleellista, mikä tärkeää, ja miten toiminta voidaan suorittaa ilman tavallisimpia virheitä. Siispä meidän tulisi miettiä myös matemaattista toimintaa. Voimme myös pohtia näitä kysymyksiä ja käyttää vertilukohtana taidekasvatuksen näkökohtia. Olemme kuulleet väitettävän, että taidekasvatus on huomattavasti edellä tiedekasvatuksesta, koska se herättää oppilaiden kiinnostusta ja itsenäisyyttä. Vertaillaanpa siis taide- ja tiedekasvatusta.

Päämääriksi voidaan taiteen ja muotoilun kurssilla asettaa:

1. Opettaa hyvän suunnittelun periaatteet.
2. Rohkaista itsenäisyyttä ja luovuutta.
3. Antaa oppilaille valikoima käytännön taitoja, jotta he voivat käyttää hyvän suunnittelun periaatteita työssään.

Eikö matematiikan kurssin päämääriksi voisi ottaa näitä, vaihtamalla suunnittelu matematiikaksi?

Seuraava lainaus on *T. Dantzigin* kirjasta:

”Tämä on kirja matematiikasta: se käsittelee symboleja ja muotoja sekä ideoita, jotka ovat symbolien ja muotojen takana. Kirjoittajan mielestä nykyinen koulukurssi riisuu matematiikan sen kulttuuriyhteydestä ja jättää vain teknisten yksityiskohtien luurangon. Tämä on monille lahjakkaille mielille vastenmielistä. Kirjan tarkoitus on tuoda takaisin kulttuuriyhteys ja esittää matematiikan kehitys sinä perin inhimillisenä tarinana, mikä se on.”

Mikä on matematiikan merkitys?

Yleensä ei huomata, miten suurta osaa matematiikka näyttelee jokapäiväisessä elämässämme. Osa tätä matematiikkaa on tietenkin varsin vanhaa: näemme joka päivä numeroita, graafeja, yhteen- ja kertolaskua. On helppoa unohtaa, että näiden keksiminen oli aikanaan suuri edistysaskel. Roomalaisten numeroiden korvaaminen arabialaisilla teki kunnon kirjanpidon mahdolliseksi ja tämän väitetään olleen syy Venetsian vaurauteen 14. vuosisadalla. On myös syytä huomata tarkkuuden merkitys matematiikassa. Ydinasia arabialaisessa systeemissä on luvun nolla käyttö. Ensi silmäyksellä tuntuu järjettömältä laskea tyhjässä laatikossa olevien esineiden lukumäärää. On yllättävää, kuinka tärkeää tämä on kunnolliselle laskusysteemille, jossa lukua 0 käytetään paikan merkkinä. Nollan käsitteen puuttuminen esti matematiikan edistyksen vuosisatojen ajan.

Korkeammalla tasolla taas emme olisi saaneet nähdä Voyager II:n kauniita kuvia planeetta Jupiterista ilman virheitä korjaavia koodeja. Tämä matematiikka on monin tavoin olennaista myös telekommunikaatiolle, tietokoneille ja erityisesti CD-soittimille. Ilman kryptografian matematiikkaa ei nykyinen miljardien dollareiden elektroninen finanssiliikenne olisi mahdollista kautta maapallon. Kategoriateoriaa, matemaattisten struktuurien teoriaa, käytetään nyt antamaan uutta näkemystä seuraavan sukupolven ohjelmistojen suunnitteluun käyttäen tulevaisuuden logiikkaa ja algebroita.

Matematiikan valtavat sovellukset insinööritieteisiin, tilastotieteeseen ja fysiikkaan tunnetaan yleisesti. Alkuräjähdyksen ja peruspartikkelien teoriat eivät olisi mahdollisia ilman matematiikkaa. Kuvitellaan, että matematiikan roolin ottavat tulevaisuudessa supertietokoneet. Tällöin ei useinkaan huomata, että nämä supertietokoneet ovat matemaattisen ja käsitteellisen formuloinnin palvelijoita: elektroniikka tekee laskut ihmeen nopeasti ja tarkasti. Esimerkiksi kehon skannerit ovat sovellus ja realisointi 19. vuosisadan matematiikasta. Tämä ilmaisee, kuinka rekonstruoida kiinteä, tiheydeltään vaihteleva objekti, kun sitä voidaan katsella röntgensäteillä; kun ainoa mittaustulos on intensiteetin muutos säteiden kulkiessa kehon läpi useista eri suunnista.

Mikä on matematiikan luonne?

Tämä on mysteeri. Nobelinpalkinnon saanut *E. Wigner* kirjoitti kuuluisan esseen *Matematiikan käsittämätön tehokkuus luonnontieteissä*. Meille avainsana on ”käsittämätön”. Hän puhuu siitä yllätyksestä, minkä matematiikan käyttö aiheuttaa pystymällä ennustamaan koetuloksiin sopien aina yhdeksän merkitsevän numeron tarkkuudella. Miten tällainen ällistyttävä tarkkuus on mahdollista? Tässä on joitain lainauksia artikkelista:

”... matematiikan ääretön hyödyllisyys fysikaalisissa tieteissä on jotain melkein mystistä, eikä sille ole rationaalista selitystä. Matematiikka on taidokkaiden operaatioiden tiede, missä käsitteet ja säännöt keksitään vain tätä tarkoitusta varten" (tarkoitus on taidokkuus...)

"Päätarkoitus on käsitteiden keksiminen. Ajatuksen syvyys, jolla matematiikan käsitteet muodostetaan, saa myöhemmin oikeutuksensa siitä taidosta, jolla näitä käsitteitä käytetään. Väite, että luonnon lait on kirjoitettu matematiikan kielellä esitettiin kunnolla kolmesataa vuotta sitten (se luetaan *Galileon* väitteeksi), nyt se on todempi kuin koskaan ennen.

... Einstein sanoi, että olemme valmiita hyväksymään ainoastaan kauniit fysiikan teoriat. Voidaan väittää, että matematiikan käsitteet, jotka perustuvat niin paljolle älylle, ovat laadultaan kauniita."

Jos matemaatikolta kysyy, miksi opiskella matematiikkaa, hän voisi vastata: Matematiikka on mallien ja rakenteiden tutkimista sekä niiden avulla loogista analysointia ja laskemista. Yrityksessämme ymmärtää maailmaa ja säilyäksemme elossa tarvitsemme abstraktin rakenteiden tieteen, metodin tietää, mikä on totta ja mikä on mielenkiintoista näille rakenteille. Matematiikka on siis loppujen lopuksi välttämätöntä ja perustaa kaikille muille luonnontieteille ja tekniikalle.

Toinen syy on näiden uusien mallien ja rakenteiden ihmettely ja mielenlumo, hämmästyttävät yhteydet, jotka tutkimuksemme on löytänyt. Matematiikka tuo myös nöyryyttä, me tiedämme, miten vaikeaa on todistaa edes yhtä pientä näennäisen helppoa väitettä. Tunnemme matemaattisen totuuden rajoitukset, ei voida todistaa kaikkea, mikä on totta, kuten *Gödel* osoitti. Matemaatikko ei väitä, että lopullinen ratkaisu, kaiken selvittävä yhtenäisteoria on tulossa. Paremminkin etsimme yllätyksiä, jotka esittävät maailman uudesta näkökulmasta. Kokemus antaa aihetta uskoa, että näitä tulee. Matemaatikolle maailma ei ole vain oudompi kuin kuvittelemmekaan, vaan oudompi kuin edes pystyt nyt kuvittelemaan. Tätä outoutta tutkimme.

Mitä matematiikka tutkii?

Tätä on jo vähän käsitelty. Matematiikkka ei tutki objekteja, vaan niiden välisiä suhteita. Matematiikalla on myös kielen luonne. Matematiikan ja sen sovellusten historia osoittaa, että juuri matematiikan kieli, menetelmät ja käsitteet tuovat sille kestävän arvon ja jokapäiväisen käytön. Joitain tärkeitä käsitteitä, joille matematiikka on antanut täsmällisyyden, ovat: luku, pituus, pinta-ala, tilavuus, muutosnopeus, satunnaisuus, laskennallisuus, symmetria, liike, voima, energia, kaarevuus, avaruus, jatkuvuus, äärettömyys, deduktiivinen päättely. *Alexander Grothendieckin* sanoin uuden matemaattisen teorian luomisessa on usein ongelmana "tuoda uusia käsitteitä pimeydestä". Nämä uudet käsitteet, jotka tekevät vaikeasta helpomman, osoittavat meille oikean tien edetä. Vielä tärkeämpi on matematiikan tapa käsitellä ja määritellä käsitteitä yhdistelemällä niitä matemaaattisiksi rakenteiksi. Nämä rakenteet, mallit, näyttävät käsitteiden välisiä suhteita ja niiden rakenteellista käyttäytymistä. Kuten sanottua, matematiikka tutkii abstrakteja malleja ja struktuureita.

Mitkä ovat matematiikan menetelmät?

Kysymystä käsitellään harvoin. Tunnetaan toki Paul Erdösin kommentti, jonka mukaan matematiikka on menetelmä, jolla kahvi muutetaan teoreemoiksi, mutta tämä ei varmaan juuri valaise asiaa ulkopuolisille. Katsotaan siis, mitä *P. David* ja *R. Hersh* sanovat asiasta kirjoissaan *The Mathematical Experience* ja *Descartes' Dream*. Edellisen kirjan luku *Inner Issues* ottaa esiin seuraavia teemoja:

Symbolit

Symbolien käyttö ja yhdistely on yksi matematiikan tunnuspiirteitä. Se on yksi niistä tekijöistä, jotka saavat suuren yleisön suhtautumaan matematiikkaan torjuvasti. Monet sanovat, että he ymmärsivät kyllä matematiikkaa, kunnes vastaan tulivat x ja y. Symbolien käsittely tiettyjen sääntöjen puitteissa on yhä tärkeä osa matematiikan käytännön taitoa. On ihmisiä, jotka tahtovat oppia (esimerkiksi) taloustiedettä, mutta jotka eivät osaa päätellä, että jos $x + 2 = 4$, niin $x = 2$. Tällaiset puutteet tekevät taloustieteen käsitteiden ymmärtämisen kovin vaikeaksi.

Sangen monimutkaisia relaatioita voi ilmaista symbolisesti tavalla, joka on hyvin vaikeaa muuttaa sanalliseksi. Tämä symbolien taloudellisuus lisääntyy jatkuvasti, kun symboleja ruvetaan käyttämään yhä mutkikkaampien käsitteiden merkkeinä ja samalla symbolien käsittelysääntöjä pidetään itse käsitteitä koskevien sääntöjen malleina.

Hiukan liioitellen on sanottu, että matematiikan historia on merkintöjen kehittymisen historiaa. Tämä heijastaa käsityskyvyn rajallisuutta. Tarvitsemme ajattelumme avuksi ja johdatukseksi tukipisteitä ja vertauskuvia.

Jotkin matemaattiset symbolit ovat jo itsessään vertauskuvia. Tällaisia ovat esimerkiksi $/$, $<$, $\to$ ja $\int$. Joihinkin toisiin on liittynyt voimakkaita assosiaatioita, joiden ansiosta nekin käyvät metaforista. Symbolien avulla voi ilmaista asioita taloudellisesti ja täsmällisesti, kuten *A.N. Whitehead* aikanaan huomautti. Jonkin tietyn symbolin käyttötapa saattaa kuitenkin muuttua ajan myötä, sitä mukaa kuin matemaatikot tottuvat uusiin merkintöihin ja omaksuvat ne käyttöönsä.

Joissain tapauksissa matemaatikkojen laiskuuden synnyttämä merkintä on voinut johtaa uusiin teorioihin. Esimerkiksi tyyppiä $(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n; \ldots; a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$ olevat merkinnät lyhentyivät aikojen kuluessa muotoon $\mathbf{A}x$, ja matriisilaskenta syntyi tarpeesta luoda tämän merkinnän korrektin käsittelyn säännöt.

Abstraktius

Tämä on matematiikan olennainen piirre. Myös se on omiaan tekemään matematiikasta suurelle yleisölle käsittämätöntä.

Matemaattiset rakenteet ovat abstrakteja. Niiden määrittely perustuu rakenteiden itsensä sisällä vallitseviin relaatioihin. Ne eivät ole aistein havaittavia. Abstraktisuuden edut ovat ainakin kolminaiset:

- Abstrakti teoria kokoaa yhteen monia yksittäistapauksia koskevan tietomme ja tekee siten helpommaksi ymmärtää tapauksien yhteiset piirteet. Usean teorian sijasta tarvitaan vain yksi. Kokoaminen hyödyntää analogioita, ei itse tapausten välillä vaan asioiden kesken vallitsevien relaatioiden ja vaikutussuhteiden välillä. Nämä analogiat tekevät monia yksittäistietoja korvaavasta abstraktista teoriasta matematiikan tärkeän metodin.
- Sen jälkeen kun teoria on saatu käyttöön, saatetaan havaita, että se sopii vielä uusiinkin yksittäistapauksiin. Tämä havainto johtaa huudahduksen ”tuostahan tulee mieleeni, että…” ilmaisemaan jännitykseen ja iloon. Onhan siis niin, että uuden ongelman ratkaisun sisältävä valmis teoria on otettavissa käyttöön vain kirjan sivuja kääntämällä.
- Abstrakti teoria antaa mahdollisuuden yksinkertaisempiin todistuksiin. Tämä on hämmästyttävää, mutta yleensä totta. Abstrakti teoria tekee mahdolliseksi keskittyä olennaisuuksiin. On mielenkiintoista tietää, pitääkö jokin väittämä paikkaansa yleisessä tilanteessa vaiko vain tietyssä erikoistapauksessa. Abstraktissa teoriassa poistuvat merkityksettömät näkökohdat.

Yleistäminen ja laajentaminen

Tällä on yhtymäkohtia abstraktiuteen, mutta yleensä kyse on hiukan eri asiasta. Pythagoraan teoreema yleistää kolmikon (3, 4, 5) määrittämän suorakulmaisen kolmion. Fermat’n suuri lause, jonka mukaan yhtälöllä $x^n + y^n = z^n$ ei ole positiivisia kokonaislukuratkaisuja (x, y, z), jos $n > 2$, on saman kolmikon ominaisuuden laajennus. Tämän laajennuksen todisti *Andrew Wiles*.

Todistaminen

Ankara todistamisen vaatimus on matematiikalle tunnusomainen piirre. Siksi matematiikka on niin olennaista tekniikassa, turvallisuudessa, fysiikassa jne.

Todistuksen, kelpaavuuden käsite matematiikassa liittyy yleiseen kysymykseen siitä, mikä on kelvollista, validia, milläkin tutkimuksen alueella. Kaikilla tutkimusaloilla, niin yhteiskuntatieteillä, taloustieteellä, kemialla, biologialla, kasvatustieteellä, oikeustieteellä kuin kirjallisuustieteelläkin on oma kelvollisuuden käsityksensä. On mielenkiintoista tarkastella kelvollisuuden eroja ja käyttöä.

Siitä, mikä on hyväksyttävissä kelvolliseksi argumentoinniksi matematiikassa, keskustellaan ja väitellään yhä. Keskustelunaihetta ovat antaneet ylipitkät todistukset (esimerkiksi äärellisten ryhmien luokittelun 15 000 sivua) ja tietokoneiden käyttö visualisoinnissa, kokeilussa ja laskemisessa.

Matemaattisten käsitteiden olemassaolo

On sanottu, että matematiikan opettamisen päätehtävä on osoittaa matemaattisten käsitteiden todellisuus. Mitä tämä todellisuus on? Millä tavoin nämä käsitteet ovat olemassa? Esimerkiksi *John Robinsonin* veistos *Eternity* (katso *http://www.cpm.informatics.bangor.ac.uk/sculmath/wake.htm*) on symbolinen kuvanveistos, mutta samalla matemaattisen säiekimpun konstruktio.

Matematiikan todellisuutta ovat pohtineet monet matematiikan filosofian harrastajat, mutta kiinnostus heidän sanomaansa näyttää olevan laimenemassa. Kysymys jonkin matemaattisen struktuurin olemassaolosta on ehkä samanlainen kuin kysymys siitä, onko šakkipeli olemassa. Se ei selvästikään ole olemassa samalla tavoin kuin tuolit ja pöydät ovat olemassa, mutta kuitenkin sillä on vaikutusta monen elämään. Ja se läpäisee myös rahatestin. (Siis kysymyksen, voiko sillä ansaita rahaa. Voi, ainakin jos on maailmanmestari tai šakkivälineiden valmistaja.)

Se, että matemaattiset käsitteet ja menetelmät ovat prosessien kaltaisia, näkyy siitäkin, että lihastoiminnan ja rytmin muisti on tärkeä puoli matemaattista työtä. Suuri osa matematiikkaa käsittelee toistuvien prosessien vaikutuksen ymmärtämistä ja realisointia.

Matemaatikot ovat eteviä ymmärtämään ja kuvittelemaan asioiden liikkumista. Termit siirtyvät yhtälön puolelta toiselle, asetelmat ja kuviot muuntuvat avaruudessa. Matemaatikot elehtivät käsillään selvittääkseen, mitä on tapahtumassa. Käsitteet ja ideat, joista matemaatikot puhuvat, ovat toisinaan ikään kuin tällaisten muistettujen prosessien ketjuja. Toisaalta, kun nämä ideat ilmaistaan kirjoittaen, tyyli on usein karua ja lyhyttä, ja tämä tekee käsitteiden ja ideoiden käytön ja soveltamisen oppimisen vaikeaksi. Mutta jokaisen on myös mahdollista muodostaa itselleen sopivin tulkinta ja sisäistää asiat omalla tavallaan.

Äärettömyys

Äärettömyyden kesyttäminen, mielikuvituksen laajentaminen niin, että se sisältää myös äärettömät operaatiot, on yksi matematiikan riemuja ja myös yksi sen skandaaleja. Ovatko nämä äärettömät objektit todellisia? Hämmästyttävää on, että näiden äärettömien, ehkä olemassa olemattomien objektien avulla voidaan todistaa äärellisiä ja todellisia asioita. Tämä on jälleen yksi puoli matematiikan mystillisyyttä. Ajatellaanpa esimerkiksi, että näiden äärettömien prosessien avulla todistetaan ydinreaktorin tai lentokoneen laskeutumisjärjestelmän turvallisuus. Kuinka uskottava tällainen todistus on? Nämä ovat aitoja kysymyksiä.

Tutkitaanko matematiikkaa?

Asiasta voi käytännössä vakuuttua tarkastelemalla *Mathematical reviews* -julkaisun kehitystä vuodesta 1940, jolloin se alkoi ilmestyä. Tämä kuukausijulkaisu sisältää matemaattisten tutkimusartikkelien lyhennelmiä. Karkeasti ottaen viisisivuisesta artikkelista kirjoitetaan pari kappaletta. Julkaisun sivumäärä on sen ilmestymisaikana yksitoistakertaistunut. Joka kuukausi julkaistaan noin 400 suurta sivua matematiikan tutkimusten referaatteja. Elämme todella matematiikan kultakautta, niin määrän kuin laadunkin puolesta.

Matematiikan tutkimuksen tavoitteet ovat moninaiset. Yksi on saada lisää tietoa jo hyvin määritellyistä ja olemassa olevista struktuureista. Toinen on ottaa selvää uusista struktuureista, sitä mukaa kuin sellaisia tulee esiin ja ne todetaan tärkeiksi. Uusia struktuurien välisiä relaatioita löytyy. On tarve yksinkertaistaa, löytää struktuureja, jotka selittävät ja auttavat ymmärtämään, miksi tietyt struktuurit käyttäytyvät tietyllä tavalla verrattuna joihinkin toisiin.

Tulokkaan ja suuren yleisön on vaikea ymmärtää, miten matemaattista tutkimusta tehdään. Annamme muutamia osviittoja esittämällä neljä eri tapaa tutkia matematiikkaa. Tapoja on varmasti paljon enemmän, ja yksittäinen tutkija joutuu loppujen lopuksi itse luomaan menestymisensä strategian. On myös vaikea sanoa, paljonko matematiikasta olisi tiedettävä, ennen kuin voi alkaa sitä tutkia. Kuuluisa vastaus tähän on ”kaikki tai ei mitään”.

Menetelmä 1. Sovella tunnettua menetelmää tunnetun tyyppiseen ongelmaan

Tämä menetelmä muodostaa luultavasti ainakin osan jokaisesta onnistuneesta matematiikan tutkimushankkeesta. Sillä on kaikki mahdollisuudet onnistua, jos vain tutkija on kyllin taitava tunnetun menetelmän käyttäjä. Matematiikan tutkimuksen tärkeimpiä keinoja on todellakin ongelman palauttaminen joksikin jo ratkaistuksi ongelmaksi. Jos alkuperäinen ongelma on liian vaikea, niin käypä strategia on yksinkertaistaa sitä niin, että siitä tulee tunnetun ongelman kaltainen, ja käsitellä sitten ne erityisongelmat, joiden ansiosta alkuperäinen ongelma on tuore. Yleinen käsitys on, että vain helpot asiat ovat tehtävissä. On siis muunnettava ongelma helpoksi. Jos et tiedä, mitä tekisit, tee ilmeiset asiat ensin.

Jos kehittyy taitavaksi vakiomenetelmien käyttäjäksi, voi eräänä päivänä huomata, että taidot sopivat myös ongelmaan, jota kukaan ei vielä ole pohtinut. Näin saattaa johtua uusiin ja tärkeisiin tuloksiin. Matemaatikon koulutuksesta suuri osa on hänen valitsemallaan alalla tehtävän työn kannalta käyvän taidon ja tiedon hankkimista.

Menetelmä 2. Käy tiedon rajoilla olevan kuuluisan ongelman kimppuun

Tämä strategia tarkoittaa tiedon huippua edustavan kuuluisan ongelman ratkaisun yrittämistä. Hyvä puoli on, että onnistuminen tekee kuuluisaksi. Vaikeampaa on ennustaa onnistumista. Luultavasti aivan uudet ideat ovat tarpeen.

Tämä tuntuu menetelmältä, jonka kunnianhimoinen nuori valitsee. Mutta, niin kuin *Stanislaw Ulam* mainitsi toiselle kirjoittajista 1964, vaikka menetelmä vetoaa kunnianhimoiseen nuoreen, siihen pitäytyminen saattaa estää häntä kehittymästä juuri sellaiseksi matemaatikoksi, johon hänellä persoonallisten ominaisuuksiensa pohjalta olisi parhaat edellytykset. Ongelma on jonkun toisen ongelma.

Tavallisempaa on toki yrittää ratkaista vähäisempiä tietämyksen raja-alueen ongelmia, sellaisia, joita ei vielä ole kovin paljon yritetty ja joissa onnistumisen todennäköisyys näin ollen on suurempi. Melko varmaan on opiskeltava, jotta saisi selville, mitä on jo tehty, minkälaisia tekniikoita on käytettävissä ja mitkä niistä on hallittava.

Voi olla hyödyllistä tutkia ongelmia, joiden ratkeamisen kriteerit ovat selviä: on kysymys, johon voi vastata vain *kyllä* tai *ei*. Tällöin toisaalta epäonnistumisellakin on ilmeinen kriteerinsä samoin kuin sillä, onko ongelma liian helppo vai ei. Matemaatikolla on hyvä olla suunnitelmansa myös sen varalle, että hänen ongelmansa tuottaa liian vähän tai liian paljon menestystä.

Menetelmä 3. Sovita yhteen eri alojen tietoa

Tässä menetelmässä opiskellaan erilaisten matematiikan alojenperusteita ja löydetään niiden välisiä yhteyksiä. Näin ikään kuin täytetään huippujen välisiä aukkoja samaan aikaan, kun "huippututkijat" puuhailevat huippujen korottamisen parissa. Menetelmän etuja on se, että siinä saa oppia eri aloista, ja hyödyllisellä tavalla, kun pyrkimyksenä on kääntää toisen alan tietoa toisen kielelle. Menetelmä sopii väitöskirjatutkimuksiin. Työn ohjaaja saattaa nähdä yhteydet käymättä läpi yksityiskohtia. Tällainen työ on myös hyödyllistä matematiikan yhtenäisyyden kannalta. Etua on myös siitä, että tutkija tottuu todistamaan pieniä, mutta hyödyllisiä tuloksia, sellaisia, jotka täyttävät aukkoja ja luovat kuvaa siitä, miten asiat ovat.

Menetelmä 4. Retki pimeään

Tutkijalla on jonkinlainen aavistus siitä, millaista matematiikkaa pitäisi olla olemassa. On myös joitakin vihjeitä niistä aineksista, joista tämä matematiikka voitaisiin rakentaa. Ongelmana on, että kunnollinen matematiikka tarvitsee määritelmiä, esimerkkejä, apulauseita, lauseita, todistuksia, laskelmia eikä alussa ole näistä mitään, joten ne on koottava työn edetessä. Missä järjestyksessä tulisi edetä, ja onko tulos tärkeää matematiikkaa? Tätä ei voi juuri arvioida, ennen kuin teoria on luotu, eikä teoria koskaan synny täydellisenä niin kuin Afrodite-jumalatar meren vaahdosta. Teoria kasvaa vuosien matkassa, ja tarvitaan sisua ja uskoa tutkimuksen merkitykseen, jotta jaksaisi teoriansa kanssa tuon matkan kulkea.

On sanottu, että tutkimuksessa menestymisen salaisuus on kyky sopeutua epäonnistumisiin. Ellei koskaan epäonnistu, on luultavaa, että on tullut ryhtyneeksi liian helppoihin ongelmiin. Mielenkiintoiseen tutkimukseen kuuluu aina riskin aineksia. Tarvitaan strategioita tilanteisiin, joissa mennään pieleen. Ongelma on ollut liian vaikea tai liian helppo. Mitä seuraavaksi? Tulevien tutkimusten kannalta on opettavaa analysoida epäonnistumisen syitä ja verrata näitä syitä niihin syihin, joiden perusteella alun alkaen halusi käsitellä juuri kyseistä ongelmaa.

Mikä on hyvää matematiikkaa?

Emme yritä antaa tähän kysymykseen lopullista vastausta. Jokainen voi kuitenkin pyrkiä muodostaa käsityksen joistakin hyvältä matematiikalta odotettavista piirteistä. Matemaattisten julkaisujen toimittajina joudumme päivittäin tekemään päätöksiä, jotka koskevat matemaattisen työn laatua. Kun saamme uuden käsikirjoituksen, teemme seuraavia kysymyksiä: Ovatko tulokset uusia? Kuinka paljon ne tuovat uutta jo julkaistuihin tuloksiin verrattuina? Onko artikkeli hyvin ja selvästi kirjoitettu? Tuntevatko kirjoittajat alalla tehdyn työn ja suhteuttavatko he tuloksensa siihen? Miten yllättäviä tulokset ovat? Kuinka elegantteja ovat käytetyt menetelmät? Onko kehitetty uusia menetelmiä?

"Parhaaseen" matematiikkaan kuuluvat työt, jotka tuovat esiin uusia sellaisia uusia ideoita ja käsitteitä, jotka tekevät aikaisemmin vaikeina pidetyistä asioista helppoja. Tämä on ristiriidassa sen käsityksen kanssa, jonka mukaan matematiikka on tarkoitettu vaikeaksi, ja että juuri sen vaikeus on hyvää tekevää, kuten kylmä suihku. Päin vastoin, hyvä matematiikka voi olla (ja ehkä sen jopa pitäisi olla) helppoa. Juuri siksi emme osaa tehdä sitä. Yllättävään lopputulokseen johtava ilmeisen yksinkertaisten päätelmien yhdistäminen, ehkä lisättynä jollakin odottamattomalla käänteellä, miellyttää meitä eniten.

On huolestuttavaa, että moni nuori matematiikko käy läpi opintonsa ilman että joutuu ollenkaan miettimään sitä, mikä on hyvää matematiikkaa. Mutta kaiken inhimillisen toiminnan kohdalla on aina kysyttävä sen niin yhteiskunnalle kuin yksilöllekin. On esitetty käsitys, että minkä hyvänsä aineen opettamisessa tulisi heijastua jotain kyseisen alan ammattilaisten arvoista. Ammattilaiselle ei riitä vain vastauksen tuottaminen, on myös tärkeää tuottaa, jos vain mahdollista tyydyttävä selitys sille, miksi vastaus on se mikä on.

Onko matematiikalla tulevaisuutta?

On väitetty, että ei enää löydy uutta perusmatematiikkaa. Tätä käsitystä voi verrata niiden mielipiteeseen, jotka sanovat, että fysiikka on valmis, että peruskysymykset on ratkaistu. Meidän käsityksemme on, että matematiikassa on tapahtumassa vallankumous – hiljainen vallankumous, mutta kuitenkin vallankumous. Tämä tapahtuu kahdella rintamalla.

On ensinnäkin *laskennan vallankumous*. Numeerisen laskemisen ja graafisen esityksen osalta tämä vallankumous on kaikkien tuntema. Vähemmän yleisesti tunnettua on, että on olemassa tietokoneohjelmia, jotka pystyvät käsittelemään symboleja ja aksioomia ja ohjelmia, jotka pystyvät suorittamaan automaattista päättelyä. Tämän tulisi periaatteessa antaa matemaatikoille kyky laskea ja päätellä miljoonakertaisesti sen mitä nykyään, ja käsitellä nykyisin toivottoman monimutkaisina pidettyjä rakenteita. Tämän kyvyn merkitystä matematiikan opetuksen kannalta ei ole vielä kylliksi ymmärretty ja arvioitu, vaikka paljoin työtä onkin tekeillä. Tehostuneen laskennan vaikutus tutkimukseen on ollut merkittävää, ja sen merkitys luultavasti kasvaa.

Hienovaraisempi vallankumous on *käsitteellinen vallankumous*. Matematiikan korostunut ymmärtäminen struktuurien tutkimuksena on saamassa oman matematisointinsa kategoriateoriassa, struktuurien matemaattisessa ja algebrallisessa tutkimisessa. Kategoriateoria on paljastanut uusia lähestymismahdollisuuksia matematiikan perusteisiin kuten logiikkaan ja joukkooppiin. Se on nostanut arvoon ajatuksen, jonka mukaan matematiikalle ei tarvitsekaan löytää yhtä perustusta, niin kuin aikaisemmin ajateltiin, vaan vaihtoehtoisia ympäristöjä ja kehyksen, jossa niitä voidaan verrata. Nämä ajatukset ovat tärkeitä myös tietojenkäsittelytieteessä, esimerkiksi osoittaessaan uusia lähestymistapoja tietorakenteiden analysointiin.

Vaaroja edessä

Yksi matematiikan miellyttäviä piirteitä on tapa , jolla se voi toimia eri tasoilla, jotka sitten ovat vuorovaikutuksessa keskenään. Näin esimerkiksi matemaattisten rakenteiden algebrallinen tutkimus on itsessään johtanut uusiin rakenteisiin. Joillakin näistä struktuureista on ollut merkittäviä sovelluksia matematiikassa ja fysiikassa.

Matematiikkaa uhkaavat yhä monet vaarat. Vallitsee yleinen matemaatikkojen aikaansaannosten ja matematiikan tärkeyden aliarvostus. Siihen ovat osaksi syypäitä matemaatikot itse, koska he eivät ole onnistuneet määrittelemään ja selittämään tieteensä kokonaisuutta opiskelijoilleen, yleisölle, valtiovallalle tai elinkeinoelämälle. On mahdollista, että opiskelija valmistuu matematiikasta hyvin arvosanoin ilman mitään tietoa matematiikan tutkimuksesta.

Toinen vaara on tietokonetta kohtaan tunnettava yhä kasvava luottamus. Tietokone koetaan mustaksi laatikoksi, joka kertoo vastauksen, ilman että kysyjällä on mitään käsitystä asiaan liittyvistä prosesseista tai edes niistä käsitteistä, joita on tarkoitus manipuloida. Sekä tietokoneen mahdollisuudet että sen rajoitteet jäävät ottamatta huomioon, tarvittava matematiikka laiminlyödään tai jätetään luomatta, ja tietokonetta käytetään tavoin, jotka ovat virheellisiä tai vain ohjelmiston rajoittamia. Kerrotaan, että teknillisestä suunnittelusta poistetaan matemaattinen asiantuntemus ja se korvataan ohjelmistopakettien käyttäjillä. Turvataanko näin tuotteen turvallisuus ja luotettavuus, ja kyetäänkö hyödyntämään parhaita matemaattisia menetelmiä?

Jotta tällaisilta vaaroilta vältyttäisiin, on olennaisen tärkeää, että alussa esittämiimme kysymyksille osoitetaan lisääntyvää huomiota ja ymmärrystä. On ehkä olemassa keinoja, joilla matemaatikon käsitteellinen ennakointi saataisiin nopeammin muuttumaan luonnontieteen tai tekniikan sovellukseksi. Jotta niitä löytyisi, yhteiskunnassa tarvitaan matemaatikon työn ja matematiikan yhteiskunnallisen merkityksen todellista ymmärtämistä. Meidän tämän rakastamamme tieteen piirissä toimivien vastuulla on löytää tie tämän ymmärryksen kehittymiseen.

Kirjallisuus

T. Danzig, *Number: the Language of Science*, 1930, 2nd ed. 1954, Macmillan.

P. Davis ja R. Hersh: *The Mathematical Experience*. Penguin 1981.

P. Davis ja R. Hersh: *Descartes' Dream*. Penguin, 1988.

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Wiegner.html