VERKON SOLMUN LUKIJALLE

TAUSTAKUVIA — MATEMATIIKKAA ALKUOPETTAJILLE

ilmestyy piakkoin myös siistinä PAPERIVERSIONA kansien välissä. Ei siis kannata painaa tätä tiedostoa A4-papereille, vaan kirjoittaa tilaus joko Solmun osoitteeseeen tai tekijöille (kahanpaa@maths.jyu.fi) ja sitten uhrata muutama Suomen markka tai euro kirjahyllynsä siisteyden puolesta.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

ALKUSANAT

Tämä oppimateriaali on tarkoitettu matemaattiseksi taustaksi alkuopettajille, jotka haluavat kokeilla matematiikan opettamista unkarilaisittain.

Elokuussa 2000 järjesti Jyväskylän yliopiston OKL esi- ja alkuopettajille suunnatun "Matematiikkaa unkarilaisittain" -kurssin. Opettajana toimi Márta Sz. Oravecz. Kurssi tulkittiin suomeksi ja videoitiin ja siitä tehtiin kooste, jonka avulla sama kurssi voidaan järjestää uudelleen. Maaliskuussa 2001 tätä kokeiltiin käytännössä pitämällä noin 50:lle luokanopettajalle unkarilaiseen pedagogiikkaan johdattava kurssi. Samalla pidettiin matematiikan kurssi, jolla käsiteltiin niitä ideoita, jotka tulevat esille videolla tai häämöttävät sen taustalla ja joihin lapsia aletaan unkarilaistyylisessä opetuksessa hellävaraisesti totuttaa alusta asti. Samalla syntyi tämä teksti.

Kymmenen tunnin kurssilla ei voi oppia kovin paljon uusia matematiikan asioita. Toisaalta esittämämme asiat ovat opettajille monilta osin tuttuja jo entuudestaan. Tavoitteenamme on, että materiaali innostaisi heitä arvostamaan ja kehittämään matemaattisia tietojaan ja taitojaan ja katsomaan niitä uudesta näkökulmasta, pohtimaan omia käsityksiään matematiikasta ja syventämään ja selkeyttämään niitä.

Aihepiirit on esitetty toisistaan mahdollisimman riippumattomina, niin että monisteen lukuja ei tarvitse opiskella numerojärjestyksessä.

Valitsemamme harjoitustehtävät eivät riitä tuottamaan matemaattista rutiinia. Ne ovat pikemminkin ongelmatehtäviä, joissa kiinnostavia eivät ole tulokset, vaan tavat, joilla ratkaisuihin päädytään. Tehtävien tarkoituksena ei ole antaa vastauksia, vaan herättää ajatuksia.

Tämä on kokeilumateriaalia, ja otamme mielellämme vastaan parannusehdotuksia. Ennen kaikkea haluaisimme tietenkin osata opettaa näitä asioita "unkarilaisittain" esikuvana tuleville opettajille. Siihen emme kuitenkaan vielä pysty, ja niinpä on tässä tyytyminen perinteisen tyyliseen monisteeseen.

Tämän kirjan taustana on tekijöiden yhteistyö. Lauri Kahanpään luennot olivat avuksi Ossi Kankaalle hänen laatiessaan pro gradu työtään tästä aiheesta. Valmis gradu on puolestaan tämän — Kahanpään viimeistelmän — materiaalin pohja. Kun teos nyt on valmis, pyrimme vielä editoimaan sille kaveriksi videonauhan, joka sopisi yhteen unkarilaistyylistä opetusta esittelevän videokurssin kanssa.

Kiitämme sydämellisesti kaikkia kursseilla mukana olleita, etenkin sen järjestäjiä, saamastamme monipuolisesta avusta ja miellyttävästä yhteistyöstä.

Jyväskylässä toukokuussa 2001

tekijät

Sisällys

ETUALAA

1. Johdanto

Kouluissa pitäisi opettaa entistä syvällisempää matematiikkaa, koska aikaisempaa useampi oppilas tarvitsee sitä myöhemmissä opinnoissaan, ja toisaalta pitäisi opettaa oppilaita miellyttävää matematiikkaa, koska monin verroin nykyistä useamman oppilaan toivotaan hakeutuvan aloille, joilla tarvitaan ainakin jonkin verran matemaattisia taitoja ja asenteita.

Pitäisikö opetettavaa ainesta ja opetusta siis lisätä vai vähentää? Unkarissa opetetaan matematiikkaa perinteisesti paljon enemmän kuin Suomessa. Niinpä Tamás Varga päätyi kotimaassaan 1970-luvulla ainoalta mahdolliselta näyttävään ratkaisuun: Älköön opetusta laajennettako eikä supistettako, vaan muutettakoon sitä radikaalimmin korvaamalla oppisisisältöjä uusilla ja uudistamalla opetusmenetelmiä.

Uusien sisältöjen tulisi olla aikaisempaa monikäyttöisempiä – siis abstraktimpia. Matematiikan eri aloja yhdistäviä suuria periaatteita pitäisi korostaa. Matemaattisia taitoja painotettaisiin pinnallisten tietojen sijaan. Myönteisten asenteiden ja ongelmanratkaisutaitojen ja -sisun kehittymistä kuuluisi edistää.

1970 –luvun "uusi matematiikka" oli kuvatun suuntainen uudistusyritys, mutta se peruttiin epäonnistuneena monissa maissa, mm Suomessa ja USA:ssa. Uudistus kaatui liikaan kiireeseen. Vain parhaiten ainetta hallitsevat opettajat ymmärsivät joukko-opin kouluopetuksen idean, eikä heidänkään ollut helppoa saada lasten vanhempia ja koulun käytännön tason päättäjiä vakuuttuneiksi. Ylhäältä komennetuna reformi jäi muodolliseksi, tuli mahdottomaksi ja lopulta peruttiin. Takaisku oli ankara: "Uusi matematiikka" sai nyt väistyä, mutta kokeilun alta poistettuja "vanhan matematiikan" osia ei kovinkaan laajalti palautettu oppisuunnitelmiin. Suomessa erityisesti geometrian opetus lähes katosi, ja koulumatematiikasta tuli pitkälti pelkkää laskentoa ja tylsää "metoditiedettä". Laskinten ja tietokoneiden samanaikainen yleistyminen pahensi matemaattisen ajattelun opetuksen alennustilaa.

Joissakin maissa, kuten Unkarissa ja Belgiassa, kävi toisin. Siellä matematiikan opetus oli ennestään poikkeuksellisen korkeatasoista, niin että äkillisen reformin sijaan voitiin keskittyä jatkamaan olemassaolevaa pedagogista perinnettä ja systemaattista työtä. Tähän taustaan liittyy Jyväskylän kokeilussa käytetty opetusmetodien joukko, jota seuraavassa sanomme lyhyesti Vargan menetelmäksi.

2 Vargan menetelmä

Tamás Vargan metodissa matematiikan monien tärkeiden peruskäsitteiden, esimerkiksi joukon ja funktion sekä todennäköisyyslaskennan ja algebran perusteiden, pohjustaminen aloitetaan jo ensimmäisinä kouluvuosina. Tietysti lukujen käsitteleminenkin on tärkeää.

Vargan suunnittelemaa menetelmää ovat edelleen kehittäneet ja muokanneet nykyaikaan sopivaksi Márta Sz. Oravecz ja Eszter C. Neményi. Seuraava lyhyt johdanto Vargan metodiin perustuu osittain Vargan jo 1970-luvulla toimittamaan ja suureksi osaksi kirjoittamaan englanninkieliseen kirjaan "Teaching School Mathematics" [Servais, W. & Varga, T. 1971] sekä tulkitsemaamme Márta Sz. Oraveczin Jyväskylässä pitämän luentosarjan materiaaliin.

Márta Sz. Oravecz on tiivistänyt matematiikan opettamisen metodologiset periaatteet seitsemään pääkohtaan:

(1) Omakohtaisen kokemuksen hankkiminen.
(2) Abstraktion vaiheittainen eteneminen.
(3) Apuvälineitten rooli ja käyttö.
(4) Laaja ja yhtenäinen matemaattisten ideoiden pohjustus.
(5) Ikään liityvien erityispiirteiden huomioiminen.
(6) Lupa erehtyä ja väitellä.
(7) Luova opettaja.

Kuten oppimisessa yleensä, myös matematiikassa opittavan asian käyttötarve on tärkeä lähtökohta, ja käyttämällä matematiikkaa sitä oppii. Kun jotakin uutta matemaattista rakennetta käytetään mahdollisimman monipuolisesti erilaisissa yhteyksissä, sen idea selviää vähitellen. Teoria ja käytäntö eivät hyvässä opetuksessa itse asiassa ole kaukana toisistaan. Tyypillinen esimerkki tästä on muodollinen logiikka, jota aikanaan pidettiin puhtaasti teoreettisena tieteenä, mutta josta tietokoneiden myötä on tullut aivan konkreettista; tietokoneohjelmathan toimivat loogisesti ja ohjelmoinnin osaamisen edellytys on, että logiikan perusteet hallitaan. Myös tilastotiede ja todennäköisyyslaskenta ovat aiheita, joissa teoria ja käytäntö tulevat esille luonnollisella tavalla. Käytännön ja teorian yhdistäminen vaatii opettajalta paljon. On osattava teoria, johon kaikki perustuu, ja myös hallittava käytännön sovelluksia, joissa teoriaa hyödynnetään. Sitä paitsi todelliset käytännön esimerkit ovat usein niin monimutkaisia, ettei niiden soveltaminen opetukseen ole helppoa.

Matematiikkaa tulee helposti katsottua pala kerrallaan näkemättä kokonaisuutta, mutta jo Márta Sz. Oraveczin luettelossa mainittiin, että Vargan menetelmässä keskeistä on asioiden laaja ja yhtenäinen pohjustus. Vaikka tavoitteena olevat käsitteet ovat abstrakteja, niihin tutustuminen voidaan kuitenkin aloittaa jo varhain konkreettisten tilanteiden kautta ja havainnollistamiseen käytettävien apuvälineiden avulla. Kyseessä on systemaattinen menetelmä, jossa oppilas hankkii runsaasti kokemuksia erikoistapauksista, joiden kautta vähitellen muodostuu abstraktio. Vargan ajatuksena on, etteivät oikeat matematiikan käsitteet ole liian vaikeita pienille lapsillekaan, kunhan asia esitetään lapsen kehitysvaiheeseen sopivalla tavalla. Ei ole järkevää miettiä, milloin lapselle tulisi opettaa koordinaattigeometria. Sen sijaan tulisi päättää mitä asioita koordinaattigeometriasta tulisi opettaa ensimmäisellä luokalla, mitä toisella tai myöhemmällä luokalla. Vargan metodi pyrkiikin opettamaan 6-8 vuotiaille syvällisiä käsitteitä toiminnan kautta, ikäänkuin "rivien välissä". Lapselle annetaan kokemuksia asioista, joille hän vasta paljon myöhemmin osaa antaa matemaattisen nimen. Opettajan sen sijaan olisi hyvä paitsi aavistaa myös suoraan tietää riittävästi siitä ajatusmaailmasta, jonka omaksumiseen hän oppilaitaan valmentaa.

Suomalaista kouluopetusta arvostellaan toisinaan siitä, että oppilaille opetetaan ulkolukua, mekaanista laskemista ja kaavojen pyörittämistä ajattelun sijasta. Käsitteiden ja päättelyjen ymmärtäminen ja kattavan kokonaiskäsityksen luominen ovatkin varmasti ensisijaisen tärkeitä, mutta ei pidä unohtaa sitäkään, että matematiikan osaamisessa on hallittava myös rutiineja. Käytännössähän matematiikan tekeminen on mahdotonta, jos kaikki asiat on aina ajateltava uudelleen alusta asti, eivätkä juuri mitkään ole automaattisia. Rutiinien opettelunkin voi kuitenkin järjestää älykkäällä tavalla.

Sanotaan, että sen, minkä itse tekee, myös oppii. Vargan menetelmässä, ainakin alkuopetuksessa, hyvin konkreettiset opetusvälineet ovat keskeisessä asemassa. Kaikilla oppilailla on oma työkalupakki, jonka sisältämien esineiden avulla he hankkivat kokemuksia luvuista, mitoista, muodoista, ominaisuuksista jne. Satunnainen välineillä puuhastelu ei tietenkään riitä opettamaan mitään, vaan niiden käytön on oltava harkittua, taustalla on oltava matemaattinen idea, jonka ympärille on suunniteltu oppimista tukevaa toimintaa. Osa tarvittavista apuvälineistä ostetaan ja osan valmistavat lapset ja vanhemmat itse. Matematiikan tunneilla ei kuitenkaan tehdä välineitä, vaan siellä toimitaan valmiilla välineillä, niin että matematiikalle varattua aikaa ei tuhraannu turhaan.

3 Aiheiden esittely

Opetusta suunnitellessa on tarpeellista ajatella, mitä haluaa opettaa, kenelle ja miksi. Näin on matematiikankin opetuksessa asian laita. Koetamme tässä kirjasessa kertoa jotakin siitä, mitä unkarilaisen suunnitelman mukaan viime kädessä halutaan opettaa. Kaksi muuta kysymystä kaipaavat vielä paljon keskusteluja, joita toivomme saavamme käydä kurssin vetäjien ja oppilaiden sekä unkarilaisten kanssa projektin edistyessä.

Valitut aiheet ovat peräisin Márta Sz. Oravecin pitämältä kurssilta, joka oli suunnattu esi- ja alkuopettajille, ja jonka matemaattinen sisältö käsitteli ensimmäisen kouluvuoden asioita. Videota katsoessa huomaa, kuinka jo ensimmäisiä tunteja pidettäessä tähtäin on paljon kauempana kuin vain saman tunnin tai lukuvuoden asioissa. Jotta opettaja pystyisi opettamaan kaukonäköisesti, on hänellä oltava itsellään kuva matematiikan peruskäsitteistä ja matematiikan rakenteesta yleensä.

Suomessakin kansakoulu aikanaan opetti laskemaan ja mittaamaan. Matematiikan harjoitustehtävänä saattoi olla vaikkapa laskea katkaistun pyramidin tilavuus. Uudempaa koulumatematiikkaa edustaa tehtävä, jossa on ratkaistava, kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että heitettäessä kahta noppaa saa yhteensä vähintään kuutosen. Matematiikka onkin hyvin laaja tieteenala, jonka yhä useammilla eri haaroilla on alkanut olla kosketusta ihmiselämän toimintoihin. Ei ole mahdollista yrittää perehtyä tähän kaikkeen, saati opettaa sitä lapsille. Matematiikka on kuitenkin onneksi kuin suuri puu, jonka monihaaraisilla oksilla on vahva yhteinen runko, jota tukevat voimakkaat juuret näkymättömissä pinnan alla. Juurista yksi on logiikka, josta pinnalle pilkottavat osat ovat päättelytaito ja kriittisyys. Oksista monia, ennen kaikkea luonnollisiin lukuihin ja toisaalta mittaamiseen ja jakamiseen liittyviä, on puolestan tunnettu jo esihistoriallisena aikana. Kuitenkin vasta Kreikan kulttuurissa huomattiin ensimmäiset rungon säikeet, kun alettiin perustella, miksi oli syytä uskoa, että toiset väitteet olivat tosia, toiset eivät. Matematikasta muodostui Kreikassa järjestelmä, jossa totena pidetyistä aksioomista johdettiin uusia käsitteitä ja väitteitä, teoreemoja. Tämän periaatteen matematiikka on säilyttänyt; matemaattisen tiedon totuus ja arvo ovat riippuvaisia sen asemasta järjestelmässä.

Käytännössä matematiikan perusopetuksen tavoitteena ovat aina olleet laskutaidon ja päättelytaidon kehittäminen. Matematiikan osaaminen on sen lisäksi paljon muutakin, kuten taitoa tehdä järkeviä arvauksia, jakaa suuria tehtäviä mielekkäisiin osiin ja luoda uusia ideoita. Sopivassa suhteessa näitä taitoja tarvitsevat kaikki, vaikka eivät kouluttautuisikaan insinööreiksi, fyysikoiksi tai muiksi matematiikan suurkuluttajiksi, sen tuottajista puhumattakaan.

Matematiikan kirjaa ei tavallisesti kannata lukea järjestyksessä läpi. Selaa siksi tämä vihkonen nopeasti kannesta kanteen. Huomaat, että käsiteltävänä on aika hajanaisen näköinen kokoelma aiheita, jotka eivät pyri muodostamaan jäntevää kokonaisuutta yksinään, vaan yhdessä "Matematiikkaa unkarilaisittain"–kurssin tai kurssivideon kanssa. Unkarilaisen opetussuunnitelman aiheet on valittu niin, että ne tarjoaisivat ensisijaisesti mahdollisimman hyvän tilaisuuden rakentaa matematiikan puun runkoa sekä sellaisia oksia ja juuria, joiden kanssa todennäköisimmin saattaa joutua tekemisiin myöhemmin.

Tavoitteena on, että kirjasen luvut voisi opiskella melkein missä järjestyksessä tahansa. Joukko-oppi on kuitenkin matematiikan perusteoria, jonka puhetapoihin on hyvä koettaa tutustua ensimmäiseksi. Matematiikan terminologia on joiltakin muiltakin osin – esimerkiksi esittelemässämme logiikassa — hyvin vakiintunutta, eikä siitä pidä silloin poiketa. On kuitenkin myös asioita, joista puhutaan eri yhteyksissä eri nimillä. Koetamme selvittää käsitteitä ja purkaa sekaannuksia.

Seuraavassa tarkastelemme kurssin sisältöön valittuja aihepiirejä erikseen.

Joukot ja funktiot. Yleinen funktio, jossa muuttujien sallitaan olevan muitakin objekteja kuin lukuja, on yksi matematiikan keskeisimmistä käsitteistä. Se liittyy lähes kaikkeen, joten sen tunteminen on erittäin hyödyllistä, tekipä mitä tahansa matematiikkaan liittyvää. Jopa peruslaskutoimitukset, yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku ovat periaatteessa funktioita.

Itse asiassa koko matematiikka voidaan ymmärtää opiksi joukkojen rakenteista. Joukko-oppi on ainakin perusta muille matematiikan aloille, joille se antaa yhtenäisen terminologian. Yhtenäisillä puhe- ja ajattelutavoilla on ratkaiseva merkitys havaittaessa ja kuvailtaessa erilaisten matemaattisten olioiden ja teorioiden yhteisiä piirteitä. Esimerkiksi yhteenlaskun ja kertolaskun vaihdannaisuudesta on järkevää käyttää samaa nimeä: vaihdantalaki.

Yhtälöistä. Koulussa opetellaan ratkaisemaan ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöitä ja epäyhtälöitä. Yhtälön mekaaninen ratkaiseminen ei kuitenkaan kerro kaikkea yhtälön olemuksesta. Tärkeää olisi tajuta mikä yhtälö oikeastaan on, miten yhtälöt ja funktiot liittyvät toisiinsa, mitä yhtälöllä ilmaistaan, miksi yhtälöt ovat tärkeitä esimerkiksi talous- ja luonnontieteissä. Tietysti on myös syytä pitää mielessä yhtälöiden "ratkaisemiseen" liittyviä kysymyksiä: Mihin ratkaisumenetelmät perustuvat? Millä edellytyksillä yhtälö voidaan ratkaista?

Luvuista. Monet ihmiset samaistavat matematiikan laskemiseen. Vaikka matematiikka on paljon muutakin, on todellakin niin, että matematiikkaa harjoittaakseen pitää hallita numerot, lukualueet ja lukujen merkintätapoja. Aluksi lapsi kohtaa luonnolliset luvut määrää ja järjestystä kuvaavina olioina. Unkarilaistyyppisessä opetuksessa valmistellaan alusta asti myös rationaalilukuihin ja mittaamiseen sekä jopa reaalilukuihin eli täydelliseen lukusuoraan liittyviä ideoita.

Luvut ovat tietenkin yksi ensimmäisen luokan matematiikanopetuksen keskeisiä aihepiirejä. Nyt tulee helposti mieleen, että kukapa opettaja nyt ei noita osaisi. Tarkemmin ajatellen huomaa, että lukukäsitteisiin liittyykin syvällisiä ongelmia. Rationaaliluvut on tosin tunnettu ikimuistoisista ajoista alkaen, mutta negatiiviset, irrationaaliset ja kompleksiluvut ovat uudemman ajan ideoita. Aiheesta on runsaasti tehtäviä, jotka osoittavat em. asioiden sisältävän matematiikan kannalta erittäin tärkeitä ideoita.

Logiikasta. Logiikkaa käytetään matematiikan kielenä, jonka käytännöllisiä merkintätapoja on hyvä tuntea. Toisaalta logiikan perusteiden esittelyn yhteydessä voi samaan tapaan kuin geometriassakin luontevasti tuoda esille matematiikan hierarkista rakennetta sekä aksioomien, määritelmien, teoreemojen ja todistusten merkitystä matematiikalle ja matematiikan tekemiselle. Muodollista logiikkaa ei mielestämme pidä opettaa lapsille järjestelmänä, mutta opettajan on tiedettävä, että sellaisilla sanoilla kuin "kaikki", "ja", "jos–niin", "kukin", "ei koskaan", "mutta" ja "ei" on hyvin täsmälliset merkitykset, joihin kannattaa totuttaa oppilaansa.

Todennäköisyyslaskennasta ja kombinatoriikasta. Todennäköisyyslaskenta on matematiikan alue, jolla on runsaasti sovelluksia tavallisessa arkielämässä ja joka toisaalta luo myös edellytyksiä muiden tieteiden kehitykselle. Todennäköisyyslaskentaa sovelletaan mm. tilastotieteessä, taloustieteessä ja vaikkapa psykologiassa. Todennäköisyyslaskennan alkeiden oppiminen edistää yleensä kriittistä ajattelua. Kombinatoriikka puolestaan liittyy läheisesti todennäköisyyslaskentaan.

Geometriasta. Geometria on visuaalista, konkreettista, havainnollista ja vanhaa. Geometriassa yhdistyvät käytännönläheisyys ja syvällinen teoreettisuus. Geometrian käsittelyn yhteydessä voi luonnollisella tavalla tuoda esiin matematiikan historiaa ja matemaattista täsmällistä kielenkäyttöä. Geometriassa on myös alusta asti väitteitä, jotka eivät vaikuta itsestäänselviltä, vaan vaativat hyvää perustelua. Geometriassa on siis oiva tilaisuus tutustua matematiikan loogiseen rakenteeseen: oletuksiin, väitteisiin ja todistuksiin.

MATEMAATTISTA TAUSTAA

4 Joukko-oppia

On tapana ajatella, että äärellinen tai ääretön määrä eri objekteja muodostaa *joukon*. Joukkoja merkitään usein isoilla kirjaimilla $(A, B, C, \dots)$ ja alkuperäisiä objekteja, joista joukot koostuvat eli *alkioita* pienillä kirjaimilla $(a, b, c, \dots)$. Alkio a joko *kuuluu* joukkoon A $(a \in A)$ tai ei kuulu joukkoon A $(a \notin A)$. Alkiot voivat olla mitä tahansa, vaikkapa ihmisiä tai lukuja.

Merkintä $4 \in \mathbb{N}$ tarkoittaa, että luku 4 kuuluu *luonnollisten lukujen joukkoon* $\mathbb{N}$. Vastaavasti merkintä $-7 \notin \mathbb{N}$ kertoo sen, ettei -7 ole luonnollinen luku.

Jos suomalaiset ajatellaan joukoksi, niin jokainen suomalainen on sen alkio. Toisia ihmisistä koostuvia joukkoja ovat vaikka jyväskyläläiset, helsinkiläiset, miehet, naiset, savolaiset ja vasenkätiset. Nämä ovat kaikkien ihmisten joukon *osajoukkoja*. Myös matematiikassa esiintyy paljon sellaisia joukkoja, joiden alkiot eivät ole lukuja, vaan esimerkiksi pisteitä, lukupareja, funktioita, funktiojonoja tai joukkoja.

4.1 Joukko-opin peruskäsitteistä.

Joukkojen merkitsemiseen käytetään aaltosulkeita $\{\}$ siten, että sulkeiden välissä luetellaan joukon alkiot. Esim. $\{1, 6, 8, 9\}$ on joukko, johon kuuluvat alkiot ovat luvut 1, 6, 8 ja 9. Joukkoon $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ kuuluvat kaikki nollaa suuremmat luonnolliset luvut.

Perusjoukolla tarkoitetaan annetussa yhteydessä kaikkien tarkasteltavien alkioiden joukkoa. Perusjoukko vaihtelee siis tehtäväkohtaisesti. *Tyhjää joukkoa*, jolla ei ole yhtään alkiota, merkitään symbolilla $\emptyset$.

Yleensä joukon alkioiden luetteleminen on mahdotonta tai ainakin hankalaa. Joukkoja voidaan onneksi kuvata toisinkin, esimerkiksi niiden ominaisuuksien perusteella, jotka sen alkioilla on. Esimerkiksi parillisten lukujen joukko on $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ on jaollinen luvulla } 2\}$. Tässä x on joukon alkion tunnus, $\mathbb{Z}$ osoittaa, että perusjoukkona ovat kokonaisluvut, ja pystyviivan jälkeen kerrotaan, millä ehdolla kokonaisluku x kelpuutetaan joukon alkioksi.

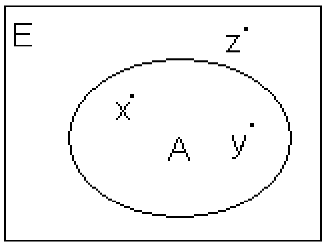
Joukkojen käsittelemisen helpottamiseksi keksittiin 1800-luvulla merkintätapoja, jotka tekevät mahdolliseksi laskea niillä hieman samaan tapaan kuin luvuilla. Joukoilla suoritettavia laskutoimituksia ovat mm. yhdisteen, leikkauksen, komplementin ja joukkojen tulon muodostaminen. Luettelemme joidenkin joukkolaskennan symbolien nimet ja selitämme sitten mitä ne merkitsevät.

$A \cap B$	joukkojen A ja B *leikkaus*
$A \cup B$	joukkojen A ja B *yhdiste* eli *unioni*
$A \smallsetminus B$	joukkojen A ja B *erotus*

$\complement A = E \setminus A$	joukon A *komplementti* (perus)joukon E suhteen
$A \subset B$	A *sisältyy* joukkoon B, eli A on B:n *osajoukko*
$A \not\subset B$	A ei ole B:n osajoukko
$A = B$	A on sama joukko kuin B, molemmilla on samat alkiot
$a \in A$	a *kuuluu* joukkoon A, eli a on A:n alkio
$a \notin A$	a ei ole A:n alkio
$\emptyset$	tyhjä joukko
$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$	alkioiden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ muodostama joukko

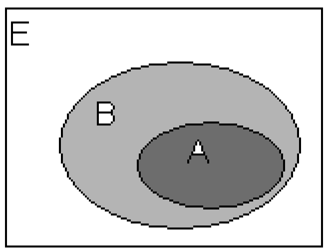
Huomaa, että joukko ei riipu järjestyksestä, jossa sen alkiot on lueteltu, eikä mainintojen lukumäärästä, vaan esimerkiksi $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 3, 1\}$.

Joukko-opin käsitteitä ja määritelmiä on usein helpompi ymmärtää kuvia piirtelemällä ja katselemalla kuin pelkästään määritelmiä lukemalla. Seuraava piirros havainnollistaa alkioiden *kuulumista joukkoon.* Alkiot x ja y kuuluvat joukkoon A, mutta z ei.



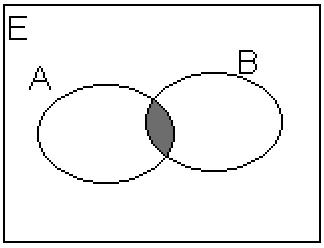
Kuva 1: $x \in A$, $y \in A$, ja $z \notin A$.

Joukon A *sisältyminen* joukkoon eli se, että A on B:n *osajoukko*, merkitsee sitä että kaikki A:n alkiot kuuluvat myös B:hen. Huomaa erityisesti, että tyhjällä joukolla on vain yksi osajoukko — se itse. Tyhjä joukko puolestaan on jokaisen joukon osajoukko.



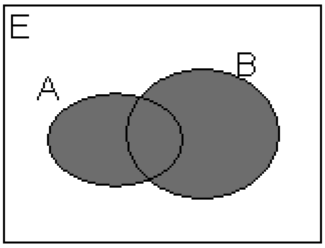
Kuva 2: Osajoukko $A \subset B$

Joukkojen A ja B *leikkaus* $A \cap B$ sisältää alkiot, jotka kuuluvat sekä joukkoon A että joukkoon B. Siis $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$.



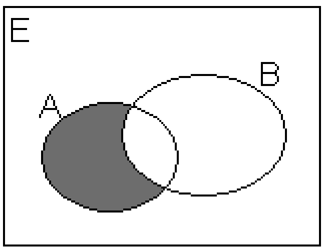
Kuva 3: Leikkaus $A \cap B$

Joukkojen A ja B *yhdiste* $A \cup B$ sisältää kaikki A:n ja kaikki B:n alkiot. Toisin sanoen $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$.



Kuva 4: Yhdiste $A \cup B$

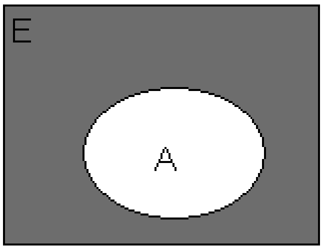
Joukkojen A ja B *joukko-opillinen erotus* $A \setminus B$ sisältää ne A:n alkiot, jotka eivät ole B:n alkioita: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ mutta } x \notin B\}$.



Kuva 5: Erotus $A \setminus B$

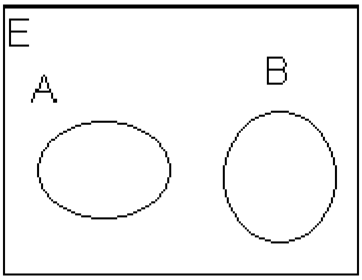
Joukon A komplementin määrittelyssä näkyy perusjoukko E, jonka osajoukkona joukkoa A tällä kertaa tarkastellaan. Joukon A *komplementti* $\complement A$ sisältää nimittäin täsmälleen kaikki ne perusjoukon E alkiot, jotka eivät ole A:n alkioita. Toisin sanoen

$$\complement A = E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$



Kuva 6: Joukon A komplementti $\complement A$

Joukot A ja B ovat *erilliset*, jos niillä ei ole yhteisiä alkioita. Tämä merkitsee samaa kuin että niiden leikkaus on tyhjä joukko: $A \cap B = \emptyset$. Erityisesti joukko ja sen komplementti ovat erillisiä.



Kuva 7: Erilliset joukot A ja B

4.2 Ominaisuudet ja luokat.
Joukon osajoukot ovat tietyssä mielessä sama asia kuin sen alkioiden ominaisuudet, joita arkikielessä yleensä ilmaistaan adjektiiveilla. Esimerkiksi ”Matematiikkaa unkarilaisittain” –kurssilla käytetyt logiikkanappulat muodostavat joukon, jolla on eräänä osajoukkonaan punaisten nappuloiden joukko. Logiikkanappuloista puhuttaessa punaisuus ja punaisten nappuloiden joukkoon kuuluminen ovat sama asia. Jos sattuisi niin, että jokin nappula olisi valmistuksessa epäonnistunut ja vaikkapa ruskeanvioletti, niin voisimme silti määritellä sen punaiseksi eli sopia että se kuuluu punaisten joukkoon. Tämähän olisi varmaan järkevää esimerkiksi siinä tapauksessa, että nappulamme olisi reiällinen kolmio ja nappulasarjastamme puuttuisi juuri punainen reiällinen kolmio. Toinen logiikkanappulan ominaisuus on sen muoto; kolmikulmaiset nappulat muodostavat oman osajoukkonsa.

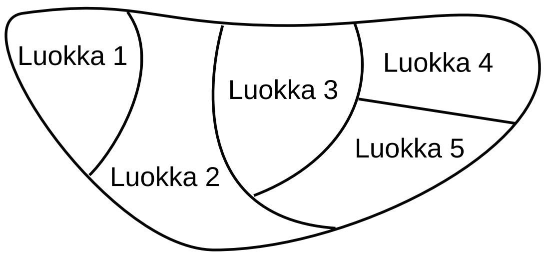
Näin huomaamme, että ”osajoukko” on *ominaisuus*-sanan abstraktio. Tarkkaan ottaen edellä esitettiin, miten jokaiseen ominaisuuteen liittyy perusjoukon osajoukko, mutta totta kai annettuun osajoukkoon kuuluminen myös on alkion ”ominaisuus”.

Eri ominaisuuksia vastaavat osajoukot voivat olla erillisiä tai sitten eivät. Edellä kolmioiden ja punaisten palikoiden leikkaus muodostuu punaisista kolmionmuotoisista palikoista, joita laatikossamme hyvinkin saattaa esiintyä. Toisinaan kuitenkin halutaan *luokitella* koko perusjoukko erillisiin osiin. Tyypillinen *luokittelu* on luokittelu ”värin mukaan”. Perusjoukko jaetaan tällöin osiin, jotka vastaavat ominaisuuksia ”sininen”, ”punainen”, ”vihreä” ja ”keltainen”. Luokittelussa pyritään siihen, että perusjoukon jokainen alkio kuuluu yhteen ja vain yhteen luokkaan: Esimerkissämme mikään nappula ei saa olla sekä sininen että punainen. Ruskeita nappuloita ei myöskään ole, vaan ainoastaan sinisiä, punaisia, vihreitä ja keltaisia.

Joukko-opin kannalta tällainen luokittelu vastaa perusjoukon jakamista erillisiin osiin eli *ositusta*. Luokitteluun liittyvät *luokat* ovat tällöin perusjoukon osajoukkoja, joilla on seuraavat kaksi ominaisuutta

(1) Perusjoukko on luokkien yhdiste.
(2) Luokat ovat erillisiä: kahden luokan leikkaus on aina tyhjä.

”Väri” on tässä yhteydessä luokittelu(peruste). Sitä ei siis joukko-opilliselta kannalta vastaa yksittäinen osajoukko, vaan perusjoukon jako erillisiksi osajoukoiksi.



Kuva 8: Perusjoukon ositus viiteen luokkaan.

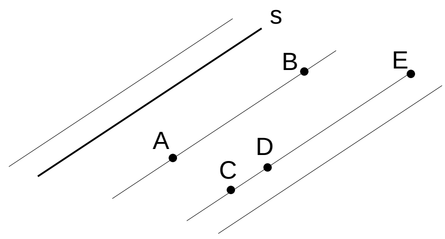
Otamme halutessamme vielä askelen suuremman abstraktion suuntaan: Sanomme, että kun luokittelusta on sovittu, niin kaksi alkiota ovat samanarvoiset eli latinaksi *ekvivalentit*, jos ne kuuluvat samaan luokkaan. Esimerkissämme siis punainen reiällinen kolmio ja punainen reiätön ympyräpalikka ovat ekvivalentit, ja tämä nimenomainen ekvivalenssi tarkoittaa ”samanvärisyyttä”. Huomaamme, että samanvärisyydellä on *abstraktille ekvivalenssirelaatiolle* tyypilliset ominaisuudet

(1) Jokainen alkio on ekvivalentti itsensä kanssa.
(2) Jos a ja b ovat ekvivalentit, niin b ja a ovat ekvivalentit.
(3) Jos a ja b ovat ekvivalentit, ja myös b ja c ovat ekvivalentit, niin a ja c ovat ekvivalentit.

On matemaattinen tosiasia — eikä kauhean vaikea todistaa — että nämä ehdot täyttävä relaatio eli ekvivalenssi aiheuttaa aina perusjoukon osituksen. Ositus tehdään tietenkin siten, että kunkin alkion kanssa samaan luokkaan otetaan kaikki sen kanssa ekvivalentit alkiot.

Esimerkkejä:.

a) Klassinen esimerkki osituksesta on tason jakaminen annetun suoran s suuntaisiksi suoriksi. Kaksi pistettä, esimerkiksi A ja B tai C ja E, ovat nyt ekvivalentit, mikäli niiden välinen jana on s:n suuntainen. Osituksen luokat ovat s:n suuntaiset suorat. Tässä esimerkissä luokkia on äärettömän monta.



KUVA 9: TASON OSITUS SUORAPARVEKSI.

b) Toinen kokoelma tunnettuja esimerkkejä ekvivalenssirelaatiosta saadaan luonnollisten lukujen jakolaskusta. Tarkastellaan aluksi jakamista luvulla kolme. Tämä jakolasku jakaa luvut kolmeen luokkaan sillä tavalla, että yhteen luokkaan otetaan kolmella jaolliset luvut, toiseen ne, joilla jakolasku antaa jakojäännöksen 1 ja kolmanteen luokkaan ne, joilla jakojäännös on 2. Ensimmäiseen luokkaan kuuluvat siis luvut 0,3,6,8, ... , toiseen 1,4,7,10, ... ja kolmanteen loput, eli 2,5,8,11, ... Kokeilemalla voi huomata, että kaksi lukua $a, b \in \mathbb{N}$ kuuluvat keskenään samaan *jäännösluokkaan*, mikäli niiden erotus $b - a$ on jaollinen kolmella.

Samalla tavalla voi määritellä jäännösluokat ja niitä vastaavan ekvivalenssin jaettaessa jollakin muulla luonnollisella luvulla $n \in \mathbb{N}$. Selvästi luokkia tulee n kpl. Erityisesti kakkosella jakaminen jakaa luvut parillisiin ja parittomiin.

Olisimme voineet sallia alunperin myös negatiiviset kokonaisluvut, ja näin tässä yhteydessä yleensä tehdäänkin. Tämä on johdonmukaista esimerkiksi siitä syystä, että silloin ei tarvitse erotusta $b-a$ tai $a-b$ laskiessa huolehtia sen merkistä. Jaettaessa luonnollisella luvulla n muodostavat jakojäännökset kokonaislukujen joukon osituksen n:ksi luokaksi. Näiden jäännösluokkien tarkastelu on jaollisuusopin oiva apuväline, sillä lukujen $a + b$ ja ab jäännösluokat riippuvat ainoastaan a:n ja b:n luokista, eivät itse luvuista. Esimerkiksi $a + b$ on parillinen, jos sekä a että b ovat parittomia. Toisena esimerkkinä huomaamme, että luvun $8 \cdot 9 \cdot 15 = 1080$ jakojäännös jaettaessa 7:llä on sama kuin luvulla $1 \cdot 2 \cdot 1$, siis 2. Tarkastamme asian jakolaskulla ja havaitsemme, että todellakin $1080 = 154 \cdot 7 + 2$.

4.3 Luonnollisten lukujen laskutoimitusten yhteys joukkoihin.

Merkinnällä $\#A$ tarkoitetaan joukon A alkioiden lukumäärää. Esimerkiksi jos $A = \{2, 4, 6\}$, niin $\#A = 3$. Näin joukko-oppi antaa merkityksen käsitteelle luku.[1]

Joukkojen yhdistämisen avulla voidaan nyt määritellä luonnollisten lukujen yhteenlasku: Ideana on, että jos joukossa A on vaikkapa kolme alkiota ja joukossa B vaikkapa kaksi, niin yhdisteessä $A \cup B$ on viisi alkiota, paitsi jos jokin alkio kuuluu sekä A:han että B:hen. Luonnollisten lukujen yhteenlaskun ja joukkojen yhdistämisen välillä vallitsee ilmeinen yhteys

$$\#A + \#B = \#(A \cup B),$$

mikäli A ja B ovat erillisiä joukkoja ts. $(A \cap B) = \emptyset$.

Huomaa, että tämä abstraktilta näyttävä idea on juuri sama, jolla pienille lapselle selitetään yhteenlasku! Huomaa myös yhteys luokitteluun: Jos perusjoukko on

[1] Tässä huijasimme vähän: lukumääräkäsitettähän käytettiin jo merkintää $\#A$ määriteltäessä. Ongelma on vältettävissä huolellisemmalla ajattelulla.

jaettu erillisiin luokkiin, niin luokkien alkioiden lukumäärät yhteenlaskemalla saa koko perusjoukon alkioiden lukumäärän.

Mieti, miten yhteenlaskun määrittelevää yhtälöä pitää muuttaa, jotta se olisi tosi myös kun A ja B eivät ole erillisiä.[2] Mieti myös, miten luonnollisten lukujen erotus liittyy joukkojen erotukseen. Tässä tarvitaan lisäoletus; pitää tarkastella tilannetta, jossa $B \subset A$.

Luonnollisten lukujen tulon joukko-opillinen vastine on *joukkojen tulo* $A \times B$, jota koordinaattien(!) keksijän René Descartesin eli Cartesiuksen mukaan sanotaan myös *karteesiseksi tuloksi.* Kuten arvata saattaa, yhteys on

$$\#A \cdot \#B = \#(A \times B),$$

joka on järjetön kaava kunnes kerromme, mikä tulojoukko $A \times B$ oikein on. Tämä on siis viisainta kertoa heti: *Tulojoukon*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ ja } b \in B\}$$

alkiot ovat joukkojen A ja B alkioiden järjestetyt parit. *Järjestetty pari* (a, b) eroaa kaksialkioisesta joukosta $\{a, b\}$ siinä, että on sovittu, kumpi on ensimmäinen, kumpi toinen parin jäsen. Erityisesti $(a, b) = (x, y)$, jos ja vain jos $a = x$ ja $b = y$.

Esimerkkejä:.

a) Klassinen esimerkki tulojoukosta on tason tulkinta kahden lukusuoran karteesiseskasi tuloksi ottamalla käyttöön koordinaatisto, jolloin piste on sama asia kuin järjestetty lukupari $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b) Äärellisten joukkojen tulojoukosta olkoot esimerkkinä kaikki eri ateriakokonaisuudet, jotka voi muodostaa, kun valittavana on kolme eri ruokaa, a, b, c ja kaksi eri juomaa, α, β. Vaihtoehdot ovat $(a, \alpha), (a, \beta), (b, \alpha), (b, \beta), (c, \alpha)$ ja (c, β). Niiden joukossa $\{a, b, c\} \times \{\alpha, \beta\} = \{(a, \alpha), (a, \beta), (b, \alpha), (b, \beta), (c, \alpha), (c, \beta)\}$ on kuusi alkiota.

c) Järjestyksen huomioivassa otannassa takaisinpanolla on laatikossa vaikkapa kolme erilaista palloa a, b ja c. Otetaan kahdesti peräkkäin pallo laatikosta laittaen ensin nostettu pallo takaisin laatikkoon ennen toisen nostamista. Tulosvaihtoehdot muodostavat joukon

$$\{a, b, c\} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\},$$

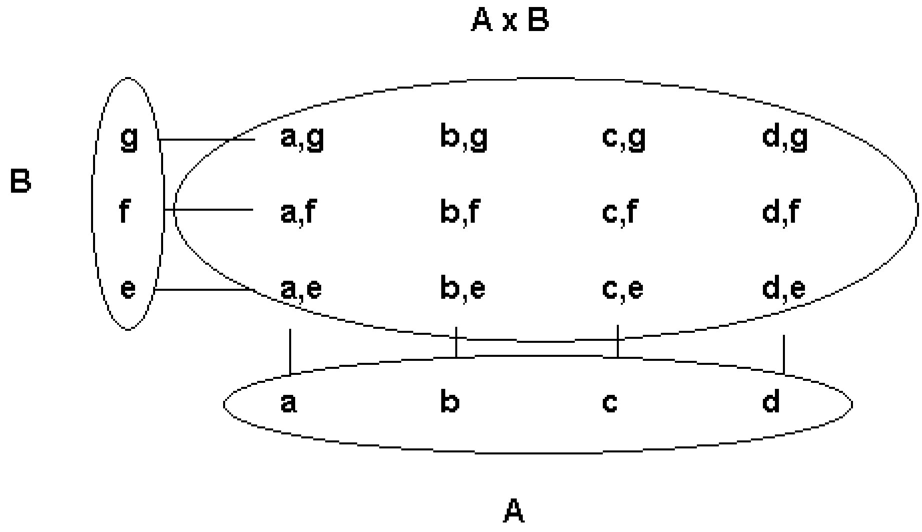
jossa on yhdeksän alkiota.

d) Tietokoneen ostossa on valittavana kone kahdesta vaihtoehdosta $1, 2$, hiiri kolmesta vaihtoehdosta $1, 2, 3$, modeemi viidestä vaihtoehdosta $1, 2, 3, 4, 5$ ja hiirimatto sadasta vaihtoehdosta $1, 2, 3, \ldots, 100$. (Näyttöjä on vain yhtä laatua.) Kokonaisuus voidaan siis kasata $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 100 = 3000$ eri tavalla, sillä vaihtoehdot, joista yksi on $(2, 2, 3, 99)$, muodostavat joukon $\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, \ldots, 100\}$

e) Kavaljeerit a, b ja c ja daamit e, f, g ja h voivat muodostaa 12 eri tanssiparia. Määrää niiden joukko itse. Huomaa, että kerrallaan parketilla nähdään kuitenkin enintään kolme näistä pareista.

Edelliset esimerkit ovat varmaankin jo vihjanneet, miten karteesinen ja tavallinen tulo liittyvät toisiinsa. Seuraava kuva valaisee asiaa uudelleen:

[2] $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.



Kuva 10: Tulojoukko $A \times B$.

Kuvasta selviää, että 12 = 4x3 = 3+3+3+3 = 4+4+4 = 3x4, eli yhteen- ja kertolaskun välinen yhteys. Kertolaskun vaihdannaisuuskin käy ilmeiseksi tällaisesta piirroksesta, joka loppujen lopuksi on hyvin lähellä kuvioita, joita hyvästä syystä käytetään tulon opettamiseen koululaisille.

On hauska huomata, että lukujen ja joukkojen tulon välinen yhteys saattaa toimia myös äärettömille joukoille. Jos vaikka A ja B ovat janoja, joiden pituudet ovat a ja b, niin $A \times B$ on suorakaide, jonka ala on $a \cdot b$. Tässä a ja b ovat positiivilukuja, mutta niiden ei tarvitse välttämättä enää olla kokonaislukuja.

Tulojoukon käyttönotosta on paljon muutakin hyötyä kuin kertolaskun tulkinta. Itse asiassa vasta tulojoukko tekee joukko-opista tehokkaan ja monipuolisen apuvälineen matemaattisten käsitteiden ymmärtämisessä. Erityisesti kohta esiteltävät relaatiot ja funktiot voi parhaiten ymmärtää tulojoukon avulla.

4.4 Relaatiot, parien ominaisuudet.

Relaatiolla tarkoitetaan jotakin yhteyttä tai suhdetta joukon alkioiden välillä. Jos perusjoukko on kaikki ihmiset, niin esim. ilmaisu ”x on y:n isä”, määrittelee relaation perusjoukossa. Tämä relaatio ”isyys” on muuten epäsymmetrinen; jos a on b:n isä, niin b tuskin on a:n isä; myöskään ”veljeys” ei ole kaikkien ihmisten joukossa symmetrinen relaatio, mutta miespuolisten ihmisten joukossa kylläkin.

Relaation molempia osapuolia ei tarvitse valita samasta perusjoukosta. Esimerkiksi relaatiossa ”a on b:n nimi” on luonnollista valita vaikkapa $A = \{x \mid x \text{ on äärellinen kirjainjono eli sana}\}$ ja $B = \{x \mid x \text{ on Suomen kansalainen}\}$.

Teoriassa *relaatio R joukolta A joukolle B* määritellään tulojoukon $A \times B$ osajoukkona. Tämä saattaa tuntua ensi silmäykseltä hämäävältä, mutta valkenee, kun asiaa ajattelee hetken. Muistamme, että osajoukko on oleellisesti sama asia kuin ominaisuus, ja relaatiohan on parien (a, b) ominaisuus. Esimerkiksi nimirelaatio ”a on b:n nimi” ei ole sanan a ominaisuus eikä ihmisen b ominaisuus, vaan nimenomaan parin (a, b) ominaisuus. Vasta, kun tiedetään sekä sana a että henkilö

b, voidaan ratkaista, onko totta, että a on b:n nimi. Itse asiassa kaikkien suomalaisten nimeäminen voidaan periaatteessa tehdä laatimalla luettelo niistä pareista $(a, b) \in A \times B$, joissa a on b:n nimi. Tämä luettelo on tulojoukon $A \times B$ osajoukko, joka täydellisesti – joskin proosallisella tyylillä – selittää, mitä nimirelaatio tarkoittaa.

Esimerkkejä.

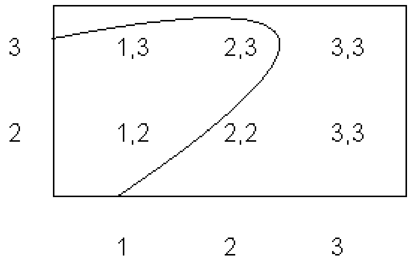
Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{2, 3\}$. Määritellään tulojoukossa $A \times B$ eli joukolta A joukolle B relaatio

$$R_< = \{(a, b) \in A \times B \mid a < b\}.$$

Voimme ilmaista saman luettelona:

$$R_< = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} \subset A \times B$$

ja piirroksena



Kuva 11: Relaatio $\{(1, 3), (2, 3), (1, 2)\}$.

Vastaavasti voidaan määritellä samojen joukkojen A ja B välille vaikkapa yhtäsuuruuden ilmaiseva relaatio

$$R_= = \{(a, b) \in A \times B \mid a = b\} = \{(2, 2), (3, 3)\} \subset A \times B$$

ja nimetön relaatio

$$R = \{(2, 3)(3, 2), (3, 3)\} \subset A \times B.$$

Aika tavallisia ovat relaatiot, joissa joukot A ja B ovat sama. Tästä olkoon esimerkkinä luonnollisten lukujen — oikeastaan niiden parien — ”seuraajarelaatio”

$$R_+ = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + 1 = b\} = \{(1, 2), (2, 3), \dots\}.$$

Myös luvussa 4.2. mainitsemamme joukon osituksiin liittyvät ekvivalenssirelaatiot ovat tätä tyyppiä. Jos joukko A on ositettu eli jaettu erillisiksi osiksi $A_1, A_2, \dots,$ niin ositusta vastaava ekvivalenssirelaatio on

$$R_e = \{(a, b) \in A \times A \mid a \text{ ja } b \text{ kuuluvat samaan osaan } A_j\}.$$

4.5 Funktion tarkka määritelmä.

Funktiokäsite esitellään konkreettisemmin ja perusteellisemmin heti seuraavassa luvussa 5, joka varmaan kannattaa lukea ennen tässä nyt olevaa selostusta. Koska kuitenkin funktio on joukko-opin ja koko matematiikankin keskeisin käsite, sitä kannattaa tarkastella monelta kannalta. Siksi esitämme tässä luvussa joukko-opillisen eli abstraktin version funktiokäsitteestä.

Funktion määrittelemiseksi joukko-opissa tarvitaan käsitteet tulojoukko ja relaatio, joka määriteltiin edellä. Muistamme, että joukkojen A ja B tulojoukon alkiot ovat järjestettyjä pareja:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ ja } b \in B\}$$

ja että tulojoukon $A \times B$ osajoukkoja $R \subset A \times B$ sanotaan A:n ja B:n välisiksi *relaatioiksi.* Funktiot ovat erityisen tyyppisiä relaatioita. Asetamme juhlallisen määritelmän, jota emme kommentoi tässä, vaan jota on syytä verrata siihen, mitä luvussa 5 kerrotaan funktioista.

MÄÄRITELMÄ. Relaatiota $f \subset A \times B$ kutsutaan *funktioksi* eli *kuvaukseksi* joukosta A joukkoon B ja merkitään

$$f : A \to B$$

mikäli sillä on seuraavat kaksi erityistä ominaisuutta:

(1) Jokaista $a \in A$ kohti on olemassa vähintään yksi $b \in B$ siten, että $(a, b) \in f$.
(2) Jokaista $a \in A$ kohti on olemassa enintään yksi $b \in B$ siten, että $(a, b) \in f$.

Alkiota b, jonka olemassaolosta ehdot puhuvat, merkitään $f(a)$. Ensimmäinen ehto sanoo, että funktio f on määritelty koko joukossa A ja toinen, että kussakin kohdassa $a \in A$ funktion arvo $f(a)$ on yksikäsitteinen.

4.6 Tehtäviä.

1. Kahdeksan henkilöä perusti bändin. Viisi soitti kitaraa, neljä lauloi ja kolme teki kumpaakin. Kuinka moni ei soittanut kitaraa eikä laulanut? Vihje: piirrä kuvio!

2. Koulussa on 70 oppilasta. Heistä lukee englantia 46, saksaa 39 ja venäjää 23. Oppilaista 9 lukee englantia ja venäjää, 5 saksaa ja venäjää, 33 saksaa ja englantia. Kolme lukee kaikkia kolmea kieltä. Kuinka moni lukee

a) vain englantia?
b) ainakin yhtä kieltä?

Vihje: piirrä kuvio!

3. Kuinka monta osajoukkoa on sellaisella joukolla, johon kuuluu tasan kolme alkiota? Vihje: muista tyhjä joukkokin.

4. Make kerää jalkapallo-, jääkiekko- ja pesäpallo-otteluiden lippuja. Kaikki paitsi 90 hänen lipuistaan ovat jääkiekkolippuja. Kaikki paitsi 110 hänen lipuistaan ovat jalkapallolippuja. Kaikki paitsi 100 hänen lipuistaan ovat pesäpallolippuja. Kuinka monta pääsylippua Makella on kaikkiaan?

5. Joukon $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ alkiot ovat ne kokonaislukuparit (a, b), joilla $b \neq 0$. Määritellään näiden välille ekvivalenssirelaatio "$\equiv$" asettamalla, että $(a, b) \equiv (c, d)$ mikäli $ad = bc$. Onko totta, että

$$(a, b) \equiv (c, d)$$

tarkoittaa samaa kuin

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad ?$$

Mitä tunnettua käsitettä vastaavat tämän relaation ekvivalenssiluokat?

5 Funktioista

5.1. Funktiokone.

Funktiokone on kuvitteellinen laite, jolla erilaisiin funktioihin tutustuminen voidaan hauskalla tavalla aloittaa jo alkuopetuksessa. Konetta voi menestyksellisesti käyttää selventämään funktion olemusta myös myöhemmässä opiskelussa.

Kone on laatikko, joka muuttaa sisäänsä laitettuja esineitä tai jopa asioita aivan toisiksi vähän samaan tapaan kuin Taikurin hattu Tove Janssonin tunnetussa samannimisessä lastenkirjassa.

Funktiokoneita on useita. Ne toimivat kaikki eri tavalla. Mutta ne eivät toimi täysin mielivaltaisesti, vaan jokainen funktiokone noudattaa ehdottomasti(!) seuraavia sääntöjä:

(1) Tiettyyn funktiokoneeseen ei voi syöttää mitä tahansa, vaan sen mukana on käyttöohje, joka kertoo, mitkä ”syötteet” ovat sallittuja tälle funktiokoneelle. Sallitut syötteet voivat periaatteesa olla mitä vain, esimerkiksi kolikoita, nappeja, pähkinäkourallisia, ihmisten nimiä tai vaikka hevosia, kunhan niiden joukko on periaatteessa etukäteen määrätty. Virheellinen syöte ei edes mene koneeseen. (Ei siis niin, että kone särkyisi tai lakkaisi toimimasta eikä etenkään niin, että se palauttaisi virheellisen syötteen muuntumattomana.)

(2) Sallittu syöte saa koneen toimimaan joka kerta. Aina onnistuu! Syöte muuttuu koneen toimiessa joksikin muuksi. Joskus harvoin syöte muuttuu omaksi itsekseen, jolloin ”muutosta” voi olla vaikea havaita muusta kuin funktiokoneen pitämästä äänestä tms.

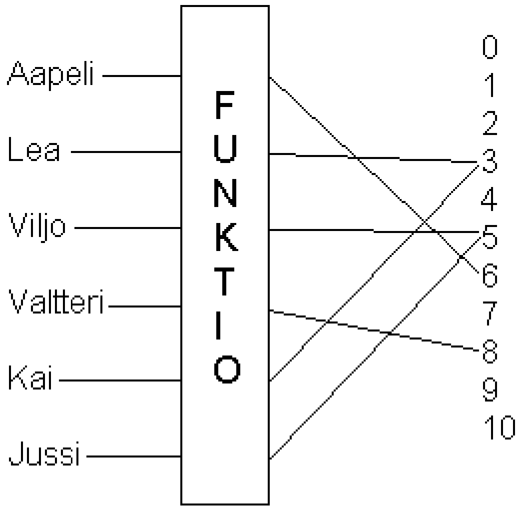
(3) Sama syöte muuntuu samalla funktiokoneella kokeiltaessa joka kerta täsmälleen samaksi kuin edelliselläkin kerralla. Tulos riippuu siis ainoastaan funktiokoneesta ja syötteestä! Jos vihreä nappi muuntuu koneessa numero kolme tänään markaksi, niin myös huomenna kone kolmonen tekee vihreästä napista markan. Mutta sen ei suinkaan tarvitse tehdä vihreiden nappien parista, siis kahdesta kerralla syötetystä napista, kahta markkaa tai edes rahoja ollenkaan.

Laskentoa opetettaessa konetta voi käyttää siten, että sen sisään syötetään vaikka lapulle kirjoitettu luonnollinen luku x ja kone tämän syötteen käsiteltyään antaa ulos jonkun luvun y. Koneesta ulos tullut luku riippuu siis sisään syötetystä luvusta ja koneessa sisällä olevasta säännöstä. Sääntö voi opetustilanteessa olla esimerkiksi sellainen, että sisään syötetty luku muuttuu koneessa kaksinkertaiseksi eli $y = 2x$ tai sellainen, että ulos tuleva luku on yhtä suurempi kuin sisään syötetty luku eli $y = x + 1$.

Funktion perusteellisen ymmärtämisen kannalta on hyvä, jos koneena toimivaa ”taikurin laatikkoa”, käytetään myös joillakin muilla objekteilla kuin pelkillä luvuilla.

Esimerkki. Koeta keksiä, mikä on seuraavan funktiokoneen toiminnan takana säännönmukaisuus:[3]

[3] Merkintä $f(\text{Aapeli}) = 6$ tarkoittaa sitä, että kun funktioon syötetään ”Aapeli” saadaan tulokseksi luku 6. Tämä kone voisi toimia vaikka siten, että se ilmoittaa sisään syötetyssä nimessä olevien kirjainten lukumäärän.



Kuva 12: Esimerkki funktiosta

Funktiokoneen toiminnan kannalta oleellista ovat kolme asiaa, sallittujen syötteiden joukko, mahdollisten tulosten joukko ja sääntö, joka liittää kuhunkin syötteeseen vastaavan tuloksen. Sallittujen syötteiden joukkoa, jonka alkioita saa syöttää funktioon f, sanotaan sen *määrittely-* eli *lähtöjoukoksi* M_f. Esimerkissämme lähtöjoukko on $M_f = \{\text{Aapeli, Lea, Viljo, Valtteri, Kai, Jussi}\}$.

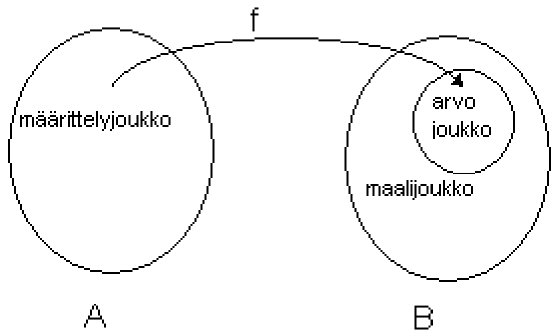
Vaikka se onkin funktiokoneen käyttäjälle vähemmän tärkeää kuin lähtöjoukon tunteminen, on funktiokoneen mukana "turvallisuussyistä" myös tieto kaikista mahdollisista tuloksista. Tämä tarkoittaa, että ei ainakaan mitään muita kuin tässä "maaliluettelossa" mainittuja tuloksia voi tulla, mutta "maalilistalla" olo ei ollenkaan takaa, että asianomainen esine putkahtaa funktiokoneesta millään sallitulla syötteellä, kielletyistä puhumattakaan. *Maalijoukon* muodostavat siis alkiot, joiksi määrittelyjoukon alkiot voivat funktiossa mahdollisesti muuttua eli kuvautua; esimerkin tapauksessa maalijoukko on ilmeisestikin $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Funktiokoneen käyttäjällä ei ole välttämättä hallussaan luetteloa niistä tuloksista, joita todella esiintyy. Tämän tiedon hän voi periaatteessa saada kokeilemalla kaikki sallitut syötteet läpi, mutta yleensä sallittujen syötteiden joukko tietenkin on liian suuri tai jopa ääretön, jolloin tämä on käytännössä mahdoton työ. Funktion f *arvo- eli kuvajoukon* muodostavat ne maalijoukon alkiot, joiksi funktin f määrittelyjoukon alkiot funktiossa muuttuvat. Arvo- eli kuvajoukko on siis esimerkkimme tapauksessa $A_f = \{3, 5, 6, 8\}$.

Funktiokoneesta on olemassa monia käytännön esimerkkejä: taskulaskimen funktionäppäimet, rautatieaseman lippuautomaatti, postimerkkiautomaatti tai vaikkapa kellarin valokatkaisija, jonka asennosta riippuu, onko valoisaa vai ei.

5.2 Yleinen funktiokäsite.

Määritelmä. *Funktio* eli *kuvaus* f joukolta A joukkoon B on sääntö $f : A \to B$, joka liittää joukon A jokaiseen alkioon joukosta B täsmälleen yhden alkion. Luvussa 4 esitetty funktion vielä täsmällisempi määritelmä sanoo saman asian!



KUVA 13: $f : A \to B, \quad f(a) = b$

A on funktion f *määrittely-* eli *lähtöjoukko* ja B sen *maalijoukko.* Funktion $f : A \to B$ *arvo-* eli *kuvajoukko*[4] on

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

Funktioihin liittyy seuraavia merkintöjä ja puheenparsia, jotka tarkoittavat kaikki samaa asiaa

- $f(a) = b$,
- $a \overset{f}{\mapsto} b$
- $a \mapsto b$,
- a *kuvautuu* b:ksi funktiossa eli *kuvauksessa* f,
- a *muuttuu* b:ksi funktiossa f,
- a:n *kuva* eli *kuvapiste kuvauksessa* f on b,
- funktion f *arvo* kohdassa (eli pisteessä) a on b,
- f *vie* alkion a alkioksi b,
- f *vaikuttaa* alkioon a siten, että saadaan alkio b,

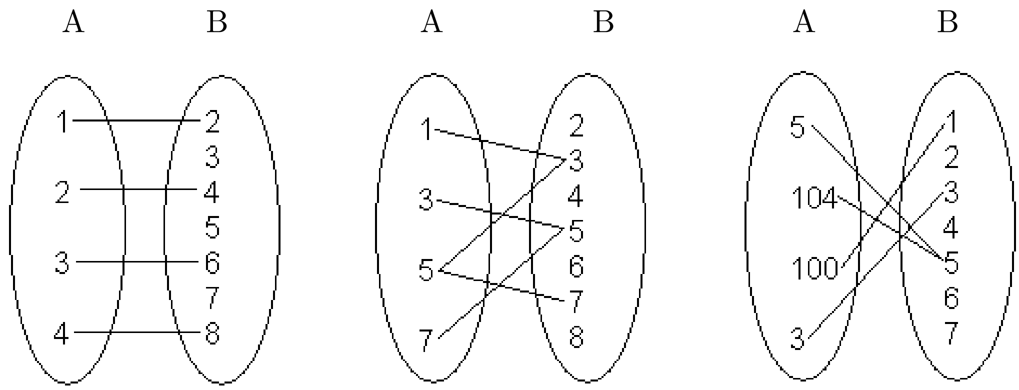
Korostettakoon vielä, että funktio pitää periaatteessa määritellä antamalla sääntö, jonka perusteella määräytyy, mihin kukin määrittelyjoukon alkio funktiossa kuvautuu. Sääntöä ei ole välttämätöntä lausua kaavana, eikä edes sanallisesti. Toisinaan se annetaan luettelona:

x	$f(x)$
$3,2$	2
$1,768$	$15,3$
$-5,4$	29
Nalle Puh	$8,7$

Tässä esimerkissä ei siis ole mitään ilmeistä kaavaa, jolla riippuvuuden voi ilmaista. Toisaalta taulukko voi olla hyödyllinen, vaikka kaava olisikin käytettävissä. Ennen taskulaskimien keksimistä käytettiin logaritmien ja trigonometristen funktioiden arvojen määräämiseen laajoja taulukoita, jollaisia lukiolaisetkin joutuivat hankkimaan.

[4] Logiikan merkkejä käyttäen saman voi lausua eri näkökulmasta näin: $f(A) = \{b \in B \mid \exists\, a \in A \text{ jolla } b = f(a)\}$.

ESIMERKKI. Mitkä seuraavista ovat funktioita $A \to B$. Osaatko kuvata niitä sanallisella säännöllä?



a) b) c)

RATKAISU. a) Kyseessä on funktio, sillä jokaista joukon $\{1,2,3,4\}$ lukua vastaa täsmälleen yksi joukon $\{2,3,4,5,6,7,8\}$ luku. Arvojoukon luku on saatu kertomalla määrittelyjoukon luku kahdella. Merkitään:

$$\begin{aligned} f : \{1,2,3,4\} &\to \{2,3,4,5,6,7,8\} \\ x &\mapsto f(x) = 2x. \end{aligned}$$

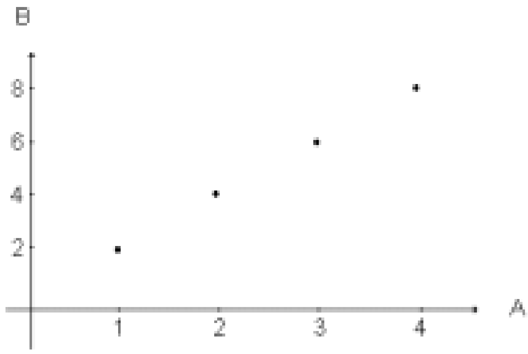
b) Kyseessä ei ole funktio, sillä määrittelyjoukon arvoa 5 vastaa kaksi arvojoukon lukua, 3 ja 7.

c) Tämä on funktio. Sen sääntöä on kuitenkin vaikea kirjoittaa kaavana. Itse asiassa tässä märittelyjoukon luku kuvautuu arvojoukkoon luvuksi, joka on määrittelyjoukon luvun numeroiden summa.

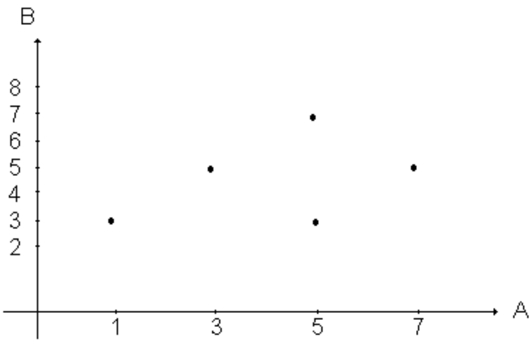
5.3 Reaalifunktiot. Olemme edellä käsitelleet hyvin abstraktia eli yleistä funktiokäsitettä. Perinteisessä lukio-opetuksessa korostuvat hyvin erityistyyppiset funktiot, polynomit, sini, eksponenttifunktio ja logaritmi. Meille nämä ovat valaiseva historiallinen esimerkki.

Funktio $f : A \to B$ on *reaalifunktio*, jos A ja B ovat reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ osajoukkoja.

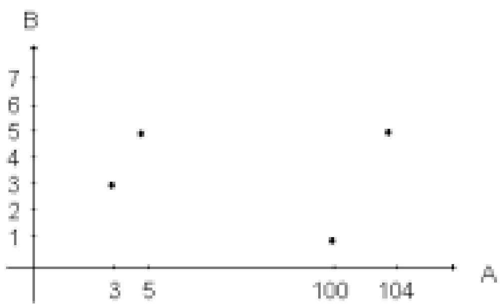
Reaalifunktioita on tapana havainnollistaa piirtämällä kuvaaja. Tämä tapahtuu samaistamalla tason pisteet lukupareihin, koordinaattipareihin (x, y). Reaalifunktion kuvaaja muodostuu näin ajatellen tason $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pisteistä $(x, f(x))$, joilla x kuuluu määrittelyjoukkoon A. Reaalifunktion kuvaaja koostuu siis kaikista pisteistä eli lukupareista (x, y), jotka toteuttavat ehdon $x \in A$ ja yhtälön $y = f(x)$. Huomaamme ohimennen, että funktioiden lisäksi myös muilla reaalisilla relaatioilla on kuvaaja. (Ks. kuvat 9 ja 14.)



Kuva 14: Edellinen esimerkki a) -kohta.



Kuva 15: Edellinen esimerkki b) -kohta. (ei funktio)



Kuva 16: Edellinen esimerkki c) -kohta.

Esimerkki. Monenlaisia asioita havainnollistetaan reaalifunktioiden kuvaajilla. Erityisesti ajan kuluessa muuttuvia suureita on luonnollista kuvailla reaalifunktioilla. Alla on sellun hinta (rationaaliluku!) ja selluvarastojen suuruus (rationaaliluku!) ilmoitettu ajan (reaaliluku) funktiona. Näille kahdelle funktiolle ei ole sääntöä, jonka mukaan voisi ennustaa sellun hinnan tai varaston suuruuden tulevaisuudessa, mutta itse kuvaaja on ”sääntö”, jonka avulla voimme määrätä sellun hinnan esimerkiksi hetkellä $t =$ (tammikuu 1997).

Kuva 17. Sellun hinnan vaihtelua.

Voimme abstrahoida paperille painetun kuvaajan teoreettiseksi kuvaajaksi ajattelemalla, että periaatteessa lukemistarkkuus on mielivaltaisen hyvä. Reaalifunktion kuvaaja on lukemistarkkuuden rajoissa sama asia kuin itse funktio, voidaanhan tulos $f(x)$ määrätä, kunhan tunnetaan kuvaaja ja sallittu syöte x.

Esimerkki.

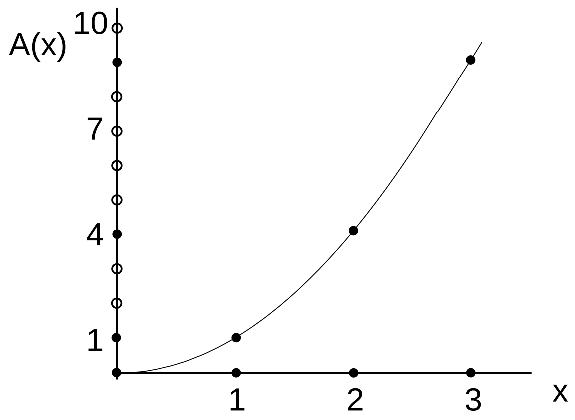
Määrää funktio, joka kuvaa neliön pinta–alan riippuvuutta neliön sivun pituudesta ja piirrä kuvaaja.

Neliön pinta-ala riippuu neliön sivun pituudesta x. Pinta-ala A on sivun pituuden funktio, ja pinta-alalle pätee kaava:

$$A(x) = x^2.$$

Koska mahdolliset sivun pituudet ovat positiivisia reaalilukuja, tämän funktion määrittelyjoukko on positiivilukujen joukko. Näitä on äärettömän paljon, joten emme voi todella luetella funktion arvoa kaikissa määrittelyjoukon pisteissä. Kuvaajan piirtämiseksi lasketaan aluksi funktion arvo vain muutamassa eri pisteessä ja täydennetään kuva parabeliksi, koska tiedetään lukiosta, mitä on odotettavissa.

x	$A(x) = x^2$
0	0
1	1
2	4
3	9



KUVA 19: $y = x^2$.

Määritä vastaavalla tavalla funktio, joka kuvaa ympyrän pinta-alan riippuvuutta sen säteestä ja piirrä kuvaaja.

5.4 Yleisen funktion kuvaaja.

Matkimalla reaalifunktion kuvaajan määritelmää voi mille tahansa funktiolle $f : A \to B$ määritellä *kuvaajan*, joka nytkin muodostuu kaikista "pisteistä" eli pareista $(x, f(x))$, kun x käy läpi kaikki määrittelyjoukon A alkiot. Funktion kuvaaja koostuu siis kaikista alkiopareista $(x, y) \in A \times B$, jotka toteuttavat yhtälön $y = f(x)$. Koska $x \in A$ ja $f(x) \in B$, niin ilmeisestikin kuvaaja on tulojoukon $A \times B$ osajoukko:

$$f\text{:n kuvaaja on joukko } \{(x, f(x)) \bigm| x \in A\} \subset A \times B.$$

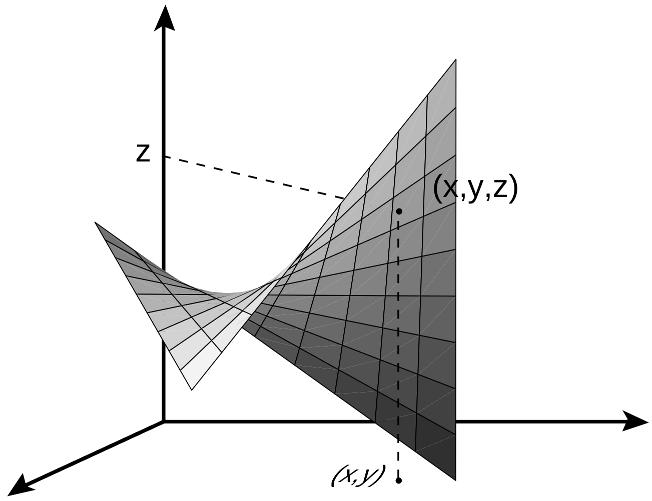
Luonnollisin yleistys reaalifunktiolle on sellainen funktio, joka liittää lukupareihin lukuja, siis kuvaus

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y).$$

Reaalilukuparien joukkoa sanotan toisinaan *reaalitasoksi* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, toisinaan esimerkiksi *$xy-$tasoksi.* Tällaisen *kahden reaalimuuttujan funktion* kuvaaja muodostuu pareista $((x, y)\,,\, z)$, missä (x, y) on lukupari ja z on luku. Kuvaaja muodostuu siis olennaisesti lukukolmikoista (x, y, z) eli avaruuden pisteistä. Samaan tapaan kuin esimerkiksi reaalifunktion $f(x) = x^2$ kuvaaja on käyrä, jossa jokaisen $x-$akselin pisteen $x \in \mathbb{R}$ kohdalla on piste $(x, f(x))$, on esimerkiksi kahden reaalimuuttujan funktion

$$z = f(x, y) = (x - 2)(y - 1) + 1$$

kuvaaja avaruudessa $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ oleva pinta, jossa jokaisen $xy-$tason pisteen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kohdalla, on piste $(x, y, f(x, y))$, joka sijaitsee pisteen (x, y) yläpuolella korkeudella $f(x, y)$.



Kuva 20: $z = f(x, y) = (x - 2)(y - 1) + 1$.

Teoriasta kiinnostunut huomaa, että joukko-opilliselta kannalta (luku 4) kuvauksen kuvaaja on joukkojen A ja B välinen relaatio. Tarkemmin ajatellen kuvaus ja sen kuvaaja ovat tulojoukon osajoukkoina sama asia.

5.5 Peruslaskutoimitukset funktioina.

Ehkä hieman yllättäviä esimerkkejä kahden reaalimuuttujan funktioista ovat tavalliset peruslaskutoimitukset.

Yhteenlasku:	$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:	$z = f(x, y) = x + y$.
Vähennyslasku:	$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:	$z = f(x, y) = x - y$.
Kertolasku:	$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:	$z = f(x, y) = x \cdot y$.
Jakolasku:	$f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$:	$z = f(x, y) = \frac{x}{y}$.

Näillekin funktioille voidaan piirtää kuvaajia, kuten yllä tehtiin, ja niistä tulee pintoja. Koeta esimerkiksi hahmotella reaalilukujen yhteenlaskufunktion kuvaaja, joka on taso!

Pintojen havainnollistamiseksi on ”kolmiulotteisten” kuvien lisäksi olemassa muitakin menettelyjä. Yksi tapa esittää graafisesti peruslaskutoimituksia tai muita kahden muuttujan funktioita ovat ns. *tasa-arvokäyrät*, joita tunnetusti käytetään esimerkiksi kartoissa kuvaamaan maaston muotoja.

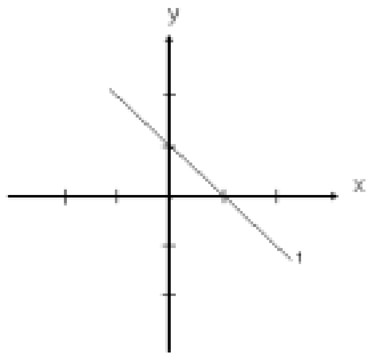
Esimerkki: Yhteenlaskua kuvaa funktio

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \qquad (x, y) \mapsto x + y.$$

Missä sijaitsevat $xy-$tason ne pisteet, joiden koordinaattien summa on 1? Eli matemaattisin merkinnöin, mikä mahtaa olla joukko :

$$f^{-1}\{1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| f(x, y) = 1\}.$$

Reaalilukupareja, joiden summa on 1, on ääretön määrä. Kaikkia pisteitä ei kuitenkaan tarvitse etsiä. Kun löytää muutamia pisteitä ja piirtää ne koordinaatistoon, niin loput pisteet voi arvata. Sopivia pisteitä ovat esim. $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, -1)$ ja $(-1, 2)$. Näiden lukuparien avulla voi hahmotella tasa-arvokäyrän $f^{-1}\{1\}$, joka on suora.

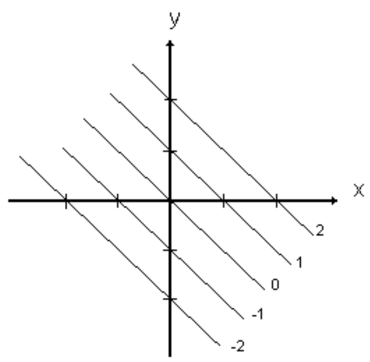


Kuva 21. $f(x, y) = x + y = 1$.

Samaan tulokseen päätyy pienellä laskelmalla ja tiedolla suoran yhtälöstä, onhan $f^{-1}\{1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x + y = 1\}$ suora, jonka yhtälö on kaarisulkeissa esiintyvä kaava $x + y = 1$ eli $y = 1 - x$.

Vastaavalla tavalla voidaan piirtää koordinaatistoon funktion $f(x, y) = x + y$ muut tasa-arvokäyrät, siis joukot, joiden pisteiden x- ja y -koordinaatien summa on $\ldots, -2, -1, 0, 2, 3, \ldots$. Nämäkin ovat suoria.

$$
\begin{aligned}
&\ldots\\
f^{-1}\{-2\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| f(x, y) = -2\}.\\
f^{-1}\{-1\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| f(x, y) = -1\}.\\
f^{-1}\{0\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| f(x, y) = 0\}.\\
f^{-1}\{1\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| f(x, y) = 1\}.\\
f^{-1}\{2\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| f(x, y) = 2\}.\\
&\ldots
\end{aligned}
$$



Kuva 22. $f(x, y) = x + y \in \{-2. -1, 0, 1, 2\}$.

Hahmottele vastaavat tasa-arvokäyrät myös vähennys-, kerto- ja jakolaskulle. Saat suoria ja hyperbeleitä.

5.6 Käänteisfunktio ja yhdistetty funktio. Monella funktiolla $f : A \to B$ on olemassa ns. *käänteisfunktio* eli *käänteiskuvaus*, joka on tietty funktio joukolta B joukolle A.

$$f^{-1} : B \to A.$$

Käänteisfunktion ideana on, että käänteiskuvauksessa funktiokoneen toiminta ikäänkuin käännetään, konetta käytetään "takaperin". Jos esimerkiksi koneessa on sääntö, jossa nappi muuttuu markaksi, niin käänteisfunktio muuttaa markan napiksi. Tällainen toiminta on tietenkin ajateltavissa vain siinä tapauksessa, että ei ole olemassa mitään muita asioita, kuin napit, mistä kone tekee markkoja. Jos näet olisi useita, ei kone osaisi valita "oikeaa" alkuperäistä.

Esimerkkejä.

- Jos funktio antaa nimen, kun siihen syötetään puhelinnumero, niin käänteisfunktio antaa puhelinnumeron, kun sille syötetään nimi.
- Jos funktio on sellainen, että siinä annettu luku kerrotaan kolmella, niin käänteisfunktio jakaa kolmella.
- Jos funktion sääntö on, että lukuun lisätään kaksi, niin käänteisfunktio vähentää kaksi.
- Jos funktio kertoo positiiviluvun itsellään, käänteisfunktio ottaa luvusta neliöjuuren.
- Jos funktio kertoo negatiiviluvun itsellään, käänteisfunktio ottaa luvusta neliöjuuren vastaluvun.
- Jos funktio kertoo minkä tahansa kokonaisluvun itsellään, käänteisfunktiota ei ole, sillä ei ole selvää, kumpi "neliöjuuri" pitäisi valita.

Annamme lopuksi erikoisen mutta lyhyen abstraktin määritelmän käänteisfunktiolle. Kiinnostuneet voivat vertailla tätä koulukirjoissa esiintyviin määritelmiin.

Määritelmä. Funktion $f : A \to B$ *käänteisfunktio* on relaatio

$$\{(b, a) \subset B \times A \mid b = f(a)\},$$

mikäli tämä relaatio sattuu olemaan funktio $f^{-1} : B \to A$ luvun 4 määritelmän mielessä.

Yhdistetyistä funktioista ei kurssillamme puhuttu mitään. Koska aihe kuitenkin kuuluu tähän yhteyteen, mainitsemme lyhyesti, että funktioista $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ voi muodostaa uuden funktion, *yhdistetyn funktion* $(g \circ f) : A \to C$ määrittelemällä sen säännöksi, joka alkioon $a \in A$ liittää sen kuvan kuvan $g(f(a)) \in C$. Esimerkiksi reaalifunktioista $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x + 2$ saadaan yhdistetty funktio

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2.$$

Yhdistetyllä funktiolla on yhteys käänteisfunktioon: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

5.7 Tehtäviä.

1. Keksi jokin funktio $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$.

2. Olkoot A ja B mitä tahansa epätyhjiä joukkoja. Onko olemassa ainakin yksi funktio $f : A \to B$?

3. Määrää funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^y$ arvo kohdassa $(2, 3)$.

4. Onko funktiolla $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x, y) = x$ olemassa käänteisfunktio $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

5. Määrää ja piirrä joukko $f^{-1}(3)$, kun $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + 2y$.

6 Luvuista ja lukujärjestelmistä

Luonnolliset luvut nolla, yksi, kaksi, kolme , neljä, ... ovat alkujaan tapa kuvailla lukumääriä. *Rationaaliluvut* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \ldots$ ja niiden jalostuneempi muoto, *reaaliluvut*, ovat alkujaan tapa kuvata "aineen määrää", käyttäen sen mittana esimerkiksi pituutta, painoa tai hintaa. Kumpaankin lukujoukkoon liittyy matemaattisia toimituksia, joista perustavanlaatuisia ovat *suuruusjärjestys* ja *laskutoimitukset*.

Itse luvuista erillinen asia on, millä nimillä niistä puhutaan, ja millä merkeillä niitä kirjoitetaan. *Kymmenjärjestelmä* ja tavallisesti käyttämämme *"arabialaiset numerot"* paikkajärjestelmineen liittyvät tähän aihepiiriin.

6.1 Luonnolliset luvut.

Suomen koulukieliopissa luonnolliset luvut esiintyvät kahdella tavalla, lukumäärää ilmoittavina *kardinaalilukuina* ja järjestystä numeroivina *järjestys-* eli *ordinaalilukuina* ensimmäinen, toinen, kolmas, ... Tämä ero näkyy matematiikassakin. Luonnollisten lukujen roolista lukumäärän ilmoittajina olemmekin jo puhuneet joukkojen yhdistettä käsittelevässä luvussa[5]. Muistamme, että tämän idean avulla on luonnollista kytkeä summan muodostaminen joukkojen yhdistämiseen, mottona "kun toisessa kädessä on kolme pähkinää ja toisessa viisi, on joukot yhdistettäessä kahdeksan pähkinää."

Luonnollisten lukujen vertailu eli järjestysrelaatiokin voidaan selittää lukumäärätulkinnan avulla, kun avuksi otetaan parien muodostamisen eli *bijektion* periaate. Käytämme taas joukon a alkioiden lukumäärästä merkkiä $\#A$. Tulkinta on kaksivaiheinen:

1. periaate: Joukossa on ainakin yhtä monta alkiota kuin sen osajoukossa, toisin sanoen

$$\text{Jos } A \subset B\,, \text{ niin } \#A \leq \#B.$$

Esimerkki: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, jolloin $A \subset B$ ja todellakin $\#A \leq \#B$, onhan itse asiassa $\#A = 3$ ja $\#B = 5$.

2. periaate: Joukoissa A ja B on yhtä monta alkiota, mikäli niistä voi muodostaa *tasaparit*, toisin sanoen, jos jokaiselle A:n alkiolle voidaan valita "pari" $b(a) \in B$ siten, että

(1) jokainen a saa eri parin
(2) kaikille riittää
(3) eikä yhtään B:n alkiota jää yli.

Kun parit on valittu näin, on selvää, että A:n alkioita, B:n alkioita ja nyttemmin myös pareja $(a, b(a))$ on yhtä monta. Tätä tapaa lukumäärien yhtäsuuruuden toteamiseen käytetään opetuksessa luonnollisella tavalla.

Esimerkki: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\bigstar, \bigcirc, \Delta\}$, jolloin tasaparit saa muodostettua

[5] Järjestyslukujen teoria on mutkikkaampaa, emmekä esitä sitä. Asia liittyy joka tapauksessa lukujen järjestykseen, siis siihen, että kaksi on ennen kolmea, ja induktioperiaatteeseen, joka kertoo, että luonnolliset luvut ovat 0, 0+1, 0+1+1, 0+1+1+1 jne. Käsittelemme induktiota hieman tässä tekstissä.

esimerkiksi kuvauksella

$$\begin{aligned} a &\mapsto \bigstar \\ b &\mapsto \Delta \\ c &\mapsto \bigcirc \end{aligned}$$

ja todellakin $\#A = \#B$, itse asiassahan $\#A = 3$ ja myös $\#B = 3$. Yhdistämällä molemmat periaatteet saadaan

Vertailuperiaate: Joukossa A on ainakin yhtä monta alkiota kuin joukossa B, mikäli jokaiselle A:n alkiolle voidaan valita "pari" $b(a) \in B$ siten, että

(1) jokainen a saa eri parin
(2) kaikille riittää.

Mutta nyt sallitaan, että joitakin B:n alkioita saa jäädä yli.

Esimerkki: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\bigstar, \bigcirc, \Delta, \square\}$, jolloin parit saa muodostettua esimerkiksi kuvauksella

$$\begin{aligned} a &\mapsto \square \\ b &\mapsto \Delta \\ c &\mapsto \bigcirc \end{aligned}$$

ja todellakin $\#A \leq \#B$, itse asiassahan $\#A = 3$ ja $\#B = 4$. Tarkasta, että jokainen A:n alkio sai eri kaverin ja huomaa mikä B:n alkioista jäi yli.

Teoriasta kiinnostuneille: Luonnollisten lukujen suuruusjärjestyksellä on seuraavat *abstraktille järjestysrelaatiolle* tyypilliset ominaisuudet:

(1) Jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$.
(2) Jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$.
(3) $a \leq a$.

Lisäksi luonnollisilla luvuilla on tärkeä järjestykseen liittyvä erikoisominaisuus, jota sanotaan *induktioperiaatteeksi.* Periaate sanoo oleellisesti sen, että nolla on luonnollinen luku ja kaikki muut luonnolliset luvut saadaan siitä siirtymällä seuraavaksi suurempaan lukuun riittävän monta kertaa.

On olemassa paljon muitakin abstrakteja järjestysrelaatioita kuin lukujen vertailu " $\leq$ ". Esimerkiksi joukkojen sisältyvyys " $\subset$ " on järjestysrelaatio, samoin kokonaislukujen jaollisuus toisillaan.[6] Koska järjestysaksioomat (1)-(3) toistuvat eri puolilla matematiikkaa[7], järjestyksen ominaisuuksien tunteminen on hyödyllistä arvaamattoman monessa paikassa. Epäyhtälöiden käsittelytaito on siis käyttökelpoinen muulloinkin kuin operoitaessa luvuilla. Tämä on tärkein syy abstraktioiden ja aksioomien käytölle ja sille, että unkarilaistyylisessä matematiikassa kiinnitetään suurta huomiota tällaisten laajalti alkuperäisen tarkoituksensa yli käyttökelpoisten yleisperiaatteiden omaksumiseen.

---

[6] Voi käydä niin, että $A \not\subset B$ ja $A \not\supset B$. Joukkojen järjestysrelaatio on *osittainen järjestys.*

[7] Katso esimerkiksi reaalilukujen määritelmää luvussa 6.3.

6.2 Luonnollisten lukujen merkitsemisestä.

Numeromerkkejä eli *numeroita* ovat *10-lukujärjestelmässämme* symbolit 0, 1, 2, ... , 9, jotka kuvaavat aluksi yksinkertaisesti kymmentä ensimmäistä luonnollista lukua. Muinaisesta Sumerista ja Intiasta arabien välityksellä oppimamme nerokkaan *paikkajärjestelmän* avulla annamme niille uusia merkityksiä. Esimerkiksi luvussa 57 viisi on kymmenten lukumäärä ja luvussa 5104 viisi on tuhansien lukumäärä. Nollamerkin käyttöönotto tekee mahdolliseksi sen, että paikkajärjestelmässä voidaan erottaa toisistaan esimerkiksi luvut 62, 602, 620 ja 6002. Paikkajärjestelmässä voimme kirjoittaa kymmenen numeromerkin avulla periaatteessa kaikki luonnolliset luvut ja sallimalla kolme lisämerkkiä (desimaalipilkku, miinus ja jakson toistumisen merkki) jopa kaikki rationaaliluvut.[8] Kymmenjärjestelmässä *kantaluku* on kymmenen, ihmisen sormien lukumäärä. Järjestelmä perustuu siihen, että luvut voidaan esittää kymmenpotenssien summana siten, että potenssien kertoimet ovat 0-9. Helmitaulu, joka käyttää kymmenjärjestelmää, mutta ei paikkajärjestelmää (eri puikoissa on eri helmet), luo varmantuntuisen mielikuvan siitä, että tämä todella onnistuu. Tarkkaan ottaen väite pitäisi todistaa. Näin onkin tehty jo muinaisessa Kreikassa, jossa Eukleideen maineikas oppikirja selvitti geometrian perusteiden lisäksi myös tarvittavan määrän lukuteoriaa, erityisesti oppia lukujen jaollisuudesta ja alkuluvuista.

Esimerkki:

$$\begin{aligned} 8603 &= 8 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 3 \cdot 1 \\ &= 8 \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10) + 6 \cdot (10 \cdot 10) + 0 \cdot 10 + 3 \\ &= 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0. \end{aligned}$$

Ymmärtääksemme kymmenjärjestelmää paremmin tarkastelemme vaihtoehtoista lukujärjestelmää, jossa kantalukuna on kakkonen. Tässä merkintäjärjestelmässä, jota kutsutaan *kaksijärjestelmäksi* eli *binäärijärjestelmäksi*, tarvitaan vain kaksi numeromerkkiä, 0 ja 1. Kaikki luvut voidaan nimittäin esittää kakkosen potenssien summana siten, että potenssien kertoimet ovat nollia tai ykkösiä.

Esimerkki. Mikä luku vastaa binäärijärjestelmän lukua 11010 kymmenjärjestelmässä?

$$\begin{aligned} 11010_2 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 + 2 + 0 \\ &= 26_{10}. \end{aligned}$$

Mieti, miten kymmenjärjestelmän luku muutetaan kaksijärjestelmän luvuksi.

Binäärijärjestelmää käytetään teorian lisäksi myös mm. tietokoneiden suorittimissa, joisa se on käytännöllinen, koska kaksi merkkiä on helppo toteuttaa sähkölaitteessa: virtaa joko tulee tai sitten virtaa ei tule. Binäärijärjestelmässä kirjoitettuna luvut ovat keskenään hyvin samannäköisiä ja niitä on vaikea erottaa toisistaan nopeasti vilkaisemalla ($58_{10} = 11010_2$ ja $153_{10} = 10011001_2$). Koneet eivät tästä häiriinny, ihmiset kylläkin.

[8]Kaikkien reaalilukujen nimeämiseen eivät äärellisenpituiset merkkijonot riitä.

6.3 Muut reaaliluvut.

Negatiivisia kokonaislukuja käytettiin Kiinassa jo ennen ajanlaskumme alkua, mutta Euroopassa ne tulivat käyttöön vasta renessanssin Italiassa kauppamiesten laskiessa saataviaan ja velkojaan. Negatiivilukuihin ei alkuopetuksen antamisen kannalta ehkä liity kovin syviä matemaattisia ongelmia, vaan pikemminkin asenteellisia kysymyksiä; pitää hyväksyä ajatus, että "kokonaisluku" voi kuvata muutakin kuin lukumäärää ja että on ihan luontevaa jatkaa "asteikkoa" lähtökohdasta myös alaspäin. Sivuutamme näiden asioiden tarkemman pohtimisen muistuttaen vain, että *kokonaislukuja* ovat luonnolliset luvut ja niiden vastaluvut, joten kokonaislukujen joukko on

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}.$$

Luvut, jotka voidaan esittää kokonaislukujen osamääränä, muodostavat *rationaalilukujen* joukon.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \neq 0\}.$$

Rationaaliluvuista puhuttaessa on kiinnitettävä huomiota siihen, että $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ voivat olla sama luku, vaikka olisi $a \neq c$ ja $b \neq d$, onhan esimerkiksi

$$\frac{3}{5} = \frac{36}{60}.$$

Rationaalilukua $\frac{a}{b}$ ei siis suinpäin voi samaistaa kokonaislukupariin (a, b), jonka avulla se ilmaistaan, vaan laventaminen ja supistaminen tuottavat ekvivalentteja — saman rationaaliluvun ilmaisevia — lukupareja. (Vrt. myös harjoitustehtävään 4.5.)

Varmaankin rationaaliluvut ovat saaneet alkunsa mittaamiseen ja jakamiseen liittyvistä käytännön ongelmista. Puolikkaiden ja neljäsosien käyttö esimerkiksi ruokaresepteissä on tavallista ja luonnollista. Vanha anglo-amerikkalainen mittasysteemi käyttää myös tuumiensa, unssiensa ja galloniensa kahdeksas- ja kuudestoistaosia; toistuva puolittaminen johtaa luontevasti tällaiseen kaksijärjestelmän käyttöön. Samaan tapaan mittayksikön toistuva jako kymmeneen osaan tuottaa desimaalilukujen käyttöönoton.

Mitä *mittaamisessa* oikeastaan tapahtuu? Tarkastelkaamme mittaamisen teoriaa esimerkkinä vaikkapa hauenvonkaleen punnitsemista tasapainovaa'alla. Hauki lojukoon vasemmassa vaakakupissa. Merkitään sen painoa kirjaimella H. Oikeaan kuppiin ladotaan aluksi kilon punnuksia ja huomataan, että kaksi ei vielä tasapainota kalaa, mutta kolmas jo painaa kupin alas. Johtopäätös

$$2 \leq H \leq 3$$

perustuu seuraaviin periaatteisiin:

(1) Vaaka on väline, jolla voi *vertailla*, kumpi kupillinen painaa enemmän.
(2) Kahden punnuksen paino on punnusten painojen (oikeastaan massojen) summa.

Punnitsemisessa ja kaikessa muussakin mittaamisessa on siis jo ennen lukujen käyttöönottoa mittaamiseen oleellista, että pystytään vertailemaan, kumpi kahdesta mitattavasta on suurempi. Luvut tulevat mukaan päättelyyn, kun hyväksytään oikeaksi fysiikaksi periaate, että "kokonainen on yhtä suuri kuin osiensa summa", siis esimerkiksi kolmen punnuksen paino on yhden punnuksen paino plus kahden punnuksen paino.

Näin on saalis punnittu kilon tarkkuudella. Haluttaessa tarkempaa tietoa toistetaan punnitusmenttely, mutta käytetään pienempiä punnuksia, vaikkapa puolikkaita tai sitten kymmenesosia alkuperäisistä, jolloin saadaan esimerkiksi tieto

$$2,4 \leq H \leq 2,5.$$

Tuloksen varmistamiseksi on syytä punnita kymmenen pikkupunnusta yhtä kilon punnusta vastaan tarkistaakseen, että niiden summa todella on yksi. Tärkeää on myös niiden samanlaisuus. Mittaamisen takana on nimittäin vielä ainakin yksi piilo-oletus:

(3) "Samanlaiset" objektit ovat yhtä suuria.

Samat periaatteet hallitsevat kaikkea mittaamista. Esimerkiksi pituuden mittaamisessa on ensin tärkeää pystyä sanomaan kahdesta janasta, kumpi on lyhempi. Tämä osataan ainakin silloin, kun ne kulkevat samasta alkupisteestä samaan suuntaan (Periaate (1): on keino vertailla). Yleisemmin vertailu tapahtuu siirtämällä mitattava jana ja mittatikkuna toimiva jana vierekkäin (Periaate (3): siirto ei muuta pituuksia.) ja vertaamalla niitä siinä. Sitten on osattava monistaa mittatikun pituus (Periaate (2): mittaus yhden yksikön tarkkuudella) ja tarkkuutta parannettaessa jaettava mittatikku kymmeneen (binäärijärjestelmässä kahteen) yhtä suureen osaan, joita käytetään uutena yksikkönä. (Periaate (3) uudelleen.)

Näin mitattaessa saadaan periaatteessa — äärellisen monen hienonnuksen jälkeen — mittaustulos halutulla tarkkuudella. Mittaustulos on päättyvä desimaaliluku, siis rationaaliluku. Tulokseen on yleensä jäänyt epätarkkuus. Mittaus voi tietenkin sattua menemään tasan jossakin vaiheessa, siis vaaka absoluuttisesti tasapainoon tai pituus tasan jäännöksettä.

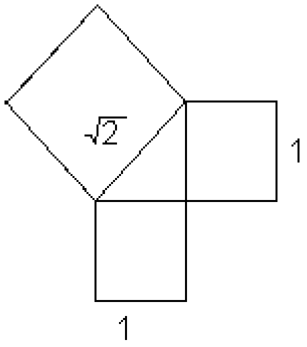
Desimaalimuotoon kirjoitettuna rationaalilukuja ovat kokonaisluvut sekä päättyvät desimaaliluvut, esimerkiksi

$$1,25 = 1\frac{25}{100},$$

ja näiden lisäksi myös päättymättömät, *jaksolliset* desimaaliluvut, kuten

$$1,3535\overline{35}\cdots = 1\frac{35}{99} = \frac{99+35}{99} = \frac{134}{99}.$$

Voisi äkkisiltään ajatella, että rationaalilukujen lisäksi ei muita lukuja tarvita mihinkään. Minkä tahansa suuruudenhan voi todellakin lausua päättyvänä desimaalilukuna millä tarkkuudella tahansa, vaikka ei välttämättä tasan!



KUVA 23: NELIÖN LÄVISTÄJÄN PITUUS.

Klassisen esimerkin *irrationaaliluvusta* keksivät muinaisessa Kreikassa Pythagoraan seuraajat, jotka tietysti tiesivät, että jos neliöllä on sivu 1, niin sen lävistäjän pituus on $\sqrt{2}$ ja kauhukseen oivalsivat, että $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku. ”Luonnossa” esiintyy siis irrationaalisia pituuksia eli mittauksia, jotka eivät koskaan mene tasan, vaikka yksikköä kuinka jakaisi tasaosiin. Todistus sille, että $\sqrt{2}$ on irrationaalinen menee näin:

TODISTUS. Ajatellanpa, että $\sqrt{2}$ kuitenkin on rationaaliluku, siis $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$. Tarvittaessa supistamalla murtoluua voi silloin huolehtia siitä, että ainakin toinen luvuista m ja n on pariton. Tämä luku ei voi olla n, sillä $2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2}$ ja siis

$$2m^2 = n^2,$$

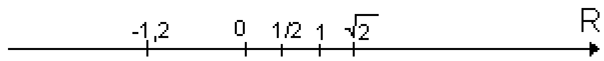
joten n^2 on parillinen ja siis myös itse n on parillinen. Koska pariton luku siis on m, ei $2m^2$ ole jaollinen 4:llä, mutta koska n on parillinen, niin n^2 on jaollinen neljällä. Olemme nyt päätelleet, että jos $\sqrt{2}$ olisi rationaalinen, niin luku $2m^2$ eli n^2 olisi neljällä sekä jaoton että jaollinen. Näin ei voi olla, ja koska olemme päätelleet oikein, on perusoletuksemme ollut väärä. $\sqrt{2}$ on siis välttämättä irrationaalinen.

On muuten paljon vaikempaa todistaa, että myös ympyrään liittyvä luku π ja logaritmien kantaluku e ovat irrationaalisia.

Mikä ihme otus $\sqrt{2}$ sitten on, jos se on ”luku” olematta rationaaliluku. Tämä onkin visainen kysymys. Kreikkalainen Eudoksos esitti siihen tosin oikean vastauksen ”verrantojen teoria”-teoksessaan jo yli kaksituhatta vuotta sitten, mutta muut eivät ymmärtäneet Eudoksoksen ideaa. Joka tapauksessa alettiin rationaali- ja irrationaaliluvuista käyttää yhteistä nimitystä *reaaliluvut*, vaikka näiden ominaisuuksia ei vuosisatoihin täysin tunnettu. Selkeä reaalilukujen teoria syntyi vasta 1800-luvulla. Emme tietenkään esittele sitä tässä. On onneksi olemassa kohtuullinen korvike: sovitaan, että *reaalilukuja* ovat kaikki desimaaliluvut, olivatpa ne jaksollisia tai eivät.[9] Reaalilukujen joukkoa merkitään $\mathbb{R}$. Sitä voidaan kuvata yhtenäisellä suoralla, jolle on merkitty kohdat 0 ja 1. Jokainen reaaliluku eli desimaaliluku voidaan sijoittaa tälle *lukusuoralle*, ja kääntäen jokaista lukusuoran pistettä vastaa joku reaaliluku.

[9]Korvikkeella on puutteensa: Mistä esimerkiksi tiedämme, että sama temppu tuottaisi samat ”reaaliluvut”, jos käyttäisimmekin binäärijärjestelmää.

Pisteeseen liittyvän luvun lukeminen tapahtuu kuvitteellisella viivoittimella, johon on merkitty ykköset, kymmenesosat, sadasosat, tuhannesosat jne. Samalla työkalulla sijoitetaan lukua vastaava piste suoralle — halutulla tarkkuudella. Juuri näinhän mittaamisprosessiamme kuvailtiin ja näinhän juuri koulussa tehdään!



Kuva 24: Lukusuora $\mathbb{R}$.

Reaalilukujen aksioomat.

Yksi tapa lakata ihmettelemästä, mitä reaaliluvut oikeastaan ovat, on *formalistinen tulkinta*: Lakataan murehtimasta koko asiaa ja sovitaan vain siitä, miten reaaliluvuilla kuuluu laskea. Osoittautuu, että kaikki tarvittava saadaan ainakin seuraavasta aika pitkästä listasta:

Laskuaksioomat eli kunta-aksioomat.

1.	vaihdantalait	$a+b=b+a$ ja $ab=ba$
2.	liitäntälait	$a+(b+c)=(a+b)+c$ ja $a(bc)=(ab)c$
3.	osittelulaki	$a(b+c)=ab+ac$
4.	nolla	$0+a=a$
5.	vastaluku:	Jokaisella luvulla a on vastaluku $-a$, jolle $a+(-a)=0$
6.	ykkönen	$1 \cdot a = a$
7.	käänteisluku	Jokaisella luvulla a, paitsi nollalla, on käänteisluku x, jolle $a \cdot x = 1$

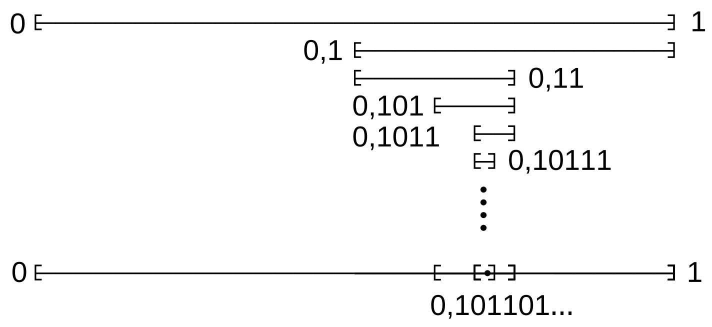
Järjestysaksioomat.

8.	definiittisyys	Joko $a<b$ tai $a=b$ tai $a>b$
9.	transitiivisuus	Jos $a<b$ ja $b<c$, niin $a<c$
10.	summasääntö	Ehdot $a<b$ ja $a+c<b+c$ ovat yhtäpitäviä
11.	tulosääntö	Jos $a>0$ ja $b>0$, niin $ab>0$

Täydellisyysaksiooma.

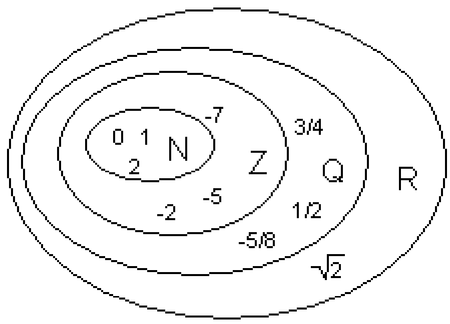
12.	täydellisyys	Jonolla sisäkkäisiä suljettuja lukuvälejä on ainakin yksi yhteinen piste.

Täydellisyysman ymmärtämiseksi pitää tietää, että lukuväli on *suljettu*, jos siinä on päät mukana: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$. Tässä a ja b ovat reaalilukuja ja $a<b$. Täydellisyysaksiooma sanoo viime kädessä, että desimaali- tai yhtälailla binaarikehitelmät todella edustavat lukuja, siis ”ovat olemassa” lukusuoran pisteinä. Kuva 25 havainnollistaa binaariluvun 0,101101... sijaintia lukusuoralla ja sen olemassaoloa täydellisyysaksiooman mielessä.



Kuva 25: Lukusuoran täydellisyys.

Lukujoukkojen keskinäisiä suhteita voidaan havainnollistaa yksinkeraisella piirroksella.



Kuva 26: Lukualueet.

6.4 Jaollisuus ja alkuluvut.
Palaamme reaalilukujen suosta kokonaislukujen turvalliselta tuntuvalle maaperälle. Kokonaisluvut voidaan tunnetusti jaotella *parillisiin* ja *parittomiin.* Kokonaisluvun parillisuus tarkoittaa, että luku voidaan esittää muodossa $2k$, missä k on kokonaisluku. Parillisten lukujen joukko on siis

$$\{\cdots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Parittomia ovat muut kokonaisluvut $\cdots - 3\ - 1,\ 1,\ 3,\ 5\ldots.$ Parittomat luvut ovat parillisten *seuraajia*, ne saadaan parillisista lisäämällä ykkönen, toisin sanoen parittomat luvut ovat muotoa $2k + 1$, missä k on kokonaisluku.

Pohtikaamme, miten voimme ilmaista kaavalla, että luku on jaollinen 3:lla, 4:llä jne.? Mitä jaollisuus tarkoittaa?

Kokonaislukujen m ja n tulon mn sanotaan olevan *jaollinen* luvuilla m ja n. Esimerkiksi 6 on jaollinen luvuilla 2 ja 3, koska $6 = 2 \cdot 3$. Lisäksi 6 on jaollinen luvuilla 1 ja 6, koska $6 = 1 \cdot 6$. Jaollisuus liittyy läheisesti jakolaskuun. Jos nimittäin $m \in \mathbb{N}$ ja $n \in \mathbb{Z}$, niin on esimerkiksi jakokulman avulla mahdollista löytää kokonaisluvut q ja r siten, että

$$n = mq + r \text{ ja } 0 \leq r < m.$$

Lukua q sanotaan *kokonaislukuosamääräksi* ja lukua r *jakojäännökseksi.* Jos $r = 0$, niin n on jaollinen m:llä eli m on n:n *tekijä.*

Esimerkkejä.

(1) Luku 45 on jaollinen viidellä ja yhdeksällä, koska $45 = 5 \cdot 9$. Luvut 5 ja 9 ovat luvun 45 tekijöitä.
(2) Luvun 12 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6 ja 12, sillä

$$12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4.$$

(3) $47 = 5 \cdot 9 + 2$, jaettaessa 47 viidellä on jakojäännös siis kaksi ja kokonaislukuosamäärä 9.

Jaoton luku eli *alkuluku* on luonnollinen ykköstä suurempi luku, joka ei ole jaollinen millään muilla luonnollisilla luvuilla kuin itsellään ja ykkösellä. Ensimmäiset alkuluvut ovat 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

6.5 Lukujonot ja sarjat.

Lukujonossa on lukuja järjestettynä jonoksi. Esimerkiksi $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ on *jaksollinen lukujono*. Jonossa esiintyviä lukuja sanotaan sen *jäseniksi*, tai alkioiksi, joskus hieman harhaanjohtavasti myös termeiksi.

Sarjaksi puolestaan sanotaan[10] ainakin matemaattisessa analyysissä yleistettyä summaa, jossa on laskettu yhteen lukujonon jäsenet, vaikkapa $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2$ ja $1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$.

Lukujonon arvot voidaan kirjoittaa luettelona $(a_1, a_2, a_3, \dots)$. Tässä a_1 on lukujonon ensimmäinen jäsen, a_2 toinen jäsen jne. Kiinnostavia ovat ainakin sellaiset jonot, joissa luvut määräytyvät jonkin säännön mukaan.[11]

Lukujono voidaan toisinaan käytännössä esittää luettelemalla alkupään alkioita, kuten edellä tehtiinkin. Tämä kuitenkin edellyttää, että alusta käy riittävän yksiselitteisesti ilmi, miten jonon ajatellaan jatkuvan. Esimerkiksi jonon $(1, 2, 3, \dots)$ neljäs alkio on varmaankin 4, mutta jonon $(3, 5, 7, \dots)$ neljäs alkio voisi olla vaikkapa 9 tai 11, riippuen siitä, tarkoitetaanko parittomia luonnollisia lukuja vai parittomia alkulukuja.

Esimerkkejä.

(1) Parittomat luvut (3, 5, 7, 9, ...) $n \mapsto 2n + 1$
(2) Parilliset luvut (2, 4, 6, 8, ...) $n \mapsto 2n$
(3) Negatiiviset kokonaisluvut (-1, -2, -3, ...) $n \mapsto -n$
(4) Alkuluvut (2,3,5,7,11, ...) $n \mapsto n$:s alkuluku.

Lukujono voidaan määritellä myös *palautuvasti* eli *rekursiivisesti* antamalla (muutama) ensimmäinen luku ja sääntö, jolla jonon seuraava jäsen lasketaan aikaisemmista.

[10] Sanalla "sarja" on arkikielessä toisenlaisia merkityksiä. Sarjakukkaiset tai lukkojen sarjoitukset tuskin liittyvät summan laskemiseen, mutta sarjaan kytketyt sähkövastukset on kyllä syytä laskea yhteen.

[11] Joukko-opin kannalta lukujono on funktio: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$: $n \mapsto a_n$. Tässä alkion järjestysnumero n on muuttuja, joka syötetään funktioon, joka antaa arvon a_n.

Esimerkkejä.

(1)

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Luettelemme tämän jonon, *Fibonaccin*[12] *lukujen*, kymmenen ensimmäistä jäsentä. Yllä olevan säännön perusteella jäsen saadaan laskemalla yhteen kaksi edellistä jäsentä.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Fibonaccin luvuilla on muuten monia mielenkiintoisia ominaisuuksia. Esimerkiksi peräkkäisten lukujen suhde a_n/a_{n+1} lähenee ns. kultaista leikkausta.

(2) *Geometrisessa jonossa* seuraava alkio saadaan kertomalla edellinen jollakin vakiolla q:

$$a_{n+1} = qa_n.$$

Jono on siis

$$(a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4, \ldots)$$

(3) Vastaavasti *aritmeettisessa jonossa* kahden peräkkäisen alkion erotus on jokin vakio d:

$$a_{n+1} = d + a_n.$$

Jono on siis

$$(a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots)$$

Jos ensimmäinen luku aritmeettisessa jonossa on 3, ja toinen on 9, niin mikä on viides? Entä, jos jono onkin geometrinen?

[12] Leonardo Fibonacci eli Pisan Leonardo oli myöhöiskeskiajan merkittävimpiäö matemaatikoita. Hän mm. otti käyttöön negatiiviset luvut Euroopassa. Muuttujan merkitseminen x:llä ja muiden lukujen merkitseminen $a, b \ldots$ on Fibonaccin keksintö.

6.6 Tehtäviä.

1. Valitse jokin luku väliltä $1 - 30$. Etsi allaolevasta taulukosta ne sarakkeet, joissa valitsemasi luku esiintyy. Laske nyt näiden sarakkeiden ensimmäiset luvut yhteen, niin saat valitsemasi luvun. Mihin tämä perustuu?

A	B	C	D	E
1	2	4	8	16
27	30	28	25	29
5	11	23	9	24
13	14	29	15	20
17	3	20	30	28
23	15	13	12	25
11	6	7	10	17
15	18	22	27	30
9	23	12	14	21
7	10	14	26	18
21	26	15	28	22
19	22	21	13	23
3	7	6	11	19
29	19	5	29	26
25	27	30	24	27

2. a) Mikä on lukujen $-10, -9, -8, \ldots, 9, 10$ summa?
b) Mikä on lukujen $-10, -9, -8, \ldots, 9, 10$ tulo?
3. Kirjoita lausekkeeseen sulut siten, että tulos on nolla

$$2 + 2 \cdot 2 - 2 : 2 + 2 \cdot 2 - 2 : 2 + 2 \cdot 2 - 2 = 0.$$

4. Erään kilpailun finaaliin pääsi 9 kuudesluokkalaista, sekä tyttöjä, että poikia. Kilpailussa 6/10 tytöistä ratkaisi vähintään 2 tehtävää oikein. Kuinka monta tyttöä ja poikaa kilpailussa oli mukana?
5. Liikutaan negatiivisella reaaliakselilla vasemmalta oikealle. Mikä on ensimmäinen positiivinen reaaliluku, johon ”törmätään”?
6. Voiko kahden irrationaaliluvun summa olla rationaaliluku?
7. Onko seuraava väite totta? Jos kahden positiivisen rationaaliluvun summa on 1, niin niiden erotus ja niiden neliöiden erotus ovat yhtä suuria.
8. Kahden kymmentä suuremman kokonaisluvun summa on 1000. Todista, että lukujen neliöiden kolme viimeistä numeroa ovat samat.

7 Yhtälöistä ja epäyhtälöistä

7.1 Ensimmäisen asteen yhtälöistä. Yhtälön tuntee merkistä "=". Esimerkiksi

$$2 + 3 = 5$$

on yhtälö, vieläpä tosi. Toisaalta virheellisenkin väitteen voi esittää yhtälönä väittämällä vaikkapa, että

$$2 + 3 = 2001.$$

Tyypillinen *ensimmäisen asteen yhtälö* on tuntemattoman luvun symbolin x sisältävä

$$3x + 2 = x + 1.$$

Tällainen *muuttujan* x sisältävä yhtälö voi olla joko tosi tai epätosi riippuen arvosta, jonka muuttuja x saa. Lukua, joka *toteuttaa yhtälön*, sanotaan yhtälön *(yksittäiseksi) ratkaisuksi* eli *juureksi*. Kun juuri sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön muuttujan x paikalle, saadaan kummastakin puolesta sama arvo.

Tuntemattoman muuttujan sisältävän yhtälön *ratkaisemisella* tarkoitetaan sitä, että haetaan kaikki ne luvut x, jotka tekevät yhtälön todeksi, siis kaikki juuret. Ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen on perinteisesti koulussa opetettu mekaanisena suorituksena, *algoritmina*:

(1) Kerrotaan mahdolliset sulkeet pois.
(2) Siirretään muuttujan sisältävät termit yhtälön vasemmalle puolelle.
(3) Siirretään muut termit yhtälön oikealle puolelle.
(4) Yhdistetään samanmuotoiset termit.
(5) Jaetaan yhtälö puolittain muuttujan kertoimella

Ei tässä sinänsä ole mitään vikaa, käytännössä matemaatikkokin tekee näin, kun ratkaistavana on ensimmäisen asteen yhtälö. Pystyäkseen selviämään vaikeammistakin yhtälöistä ja yhtälöryhmistä on kuitenkin hyvä tietää ja ymmärtää, mihin tällainen termien siirtely pohjimmiltaan perustuu. Kysymys ei ole mistään taikatempusta, vaan yksinkertaisesti lukujen perusominaisuuksista. Jos kaksi lukua — yhtälön puolet — ovat täsmälleen yhtä suuret, niin varmasti yhtäsuuruus säilyy, jos kumpaankin lausekkeeseen lisätään sama luku. Esimerkiksi todesta yhtälöstä $2 + 3 = 5$ saadaan puolittain kympit lisäämällä tosi yhtälö $2 + 3 + 10 = 5 + 10$. Alkuperäinen yhtälö palautuu näkyviin, jos sama luku — esimerkissä kymppi — taas poistetaan puolittain. Epätosi yhtälö puolestaan säilyy epätotena, kun siihen lisätään puolittain sama luku. Samaan tapaan yhtälö säilyy olennaisesti samana myös, kun molemmat puolet kerrotaan samalla luvulla, jonka kuitenkin on hyvä olla nollasta poikkeava, jotta alkuperäinen yhtälö saataisiin takaisin jakolaskulla.

Esimerkki. Ratkaistaan yhtälö

$$4x + 1 = -2x + 3.$$

Yhtälön ratkaiseminen on tapana aloittaa siirtämällä termi –2x oikealta puolelta vasemmalle vaihtaen samalla merkki positiiviseksi. Tämä toimenpide on itse asiassa täsmälleen sitä, että yhtälöön lisätään kummallekin puolelle 2x, jolloin saadaan

$$4x + 1 + 2x = -2x + 3 + 2x$$

eli

$$6x + 1 = 3.$$

Vastaavasti vakiotermin 1 siirtäminen yhtäsuuruusmerkin oikealle puolelle tarkoittaa sitä, että yhtälön molemmilta puolilta vähennetään luku 1 (eli lisätään puolittain negatiivinen luku -1).

$$6x = 3 - 1 = 2.$$

Jakamalla puolittain kuutosella saadaan

$$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Laskun vaiheet todistavat, että ainoa ehdokas yhtälömme juureksi on luku $\frac{1}{3}$. Koska kaikki vaiheet voi laskea myös takaperin, $\frac{1}{3}$ toteuttaa myös alkuperäisen yhtälön ja siis todella on juuri. Asiasta voi vakuuttua myös kokeilemalla:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{1}{3} + 1 &= \frac{7}{3} \\ -2 \cdot \frac{1}{3} + 3 = -\frac{2}{3} + \frac{9}{3} &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Ratkaisemallamme yhtälöllä $4x + 1 = -2x + 3$ oli vain yksi juuri. Sen sijaan esimerkiksi yhtälöllä

$$2x + 1 = 2x + 1$$

on äärettömän monta juurta, sen ratkaisu(joukko) on koko $\mathbb{R}$. Tästä näkee, miksi olisi hyvä erottaa toisistaan käsitteet "juuri" ja "ratkaisu", vaikka näin ei puhekielessä tehdä. Tällainen yhtälö, joka toteutuu kaikilla muuttujan arvoilla, on *identtisesti tosi*. Vastaavasti yhtälö, joka ei toteudu millään mahdollisella muuttujan arvolla, on *identtisesti epätosi* eli *ristiriitainen*. Keksi esimerkki identtisesti epätodesta yhtälöstä!

7.2 Ensimmäisen asteen yhtälöpareista.

Pekalla on kaksi euroa enemmän kuin Liisalla. Yhteensä heillä on miljoona euroa. Kuinka paljon on kummallakin? Usein tällaiset käytännön tehtävät johtavat tilanteeseen, jossa tuntemattomia on kaksi tai useampiakin. Ongelmassamme merkitään Pekan euromäärää x:llä ja Liisan euromäärää y:llä, jolloin annetut tiedot ovat $x = y + 2$ ja $x + y = 1\,000\,000$. Kun selvitetään milloin kaksi yhtälöä (tai useampia yhtälöitä) toteutuvat yhtä aikaa, ratkaistaan *yhtälöpari* tai suurempikin yhtälöryhmä.

Esimerkki. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

Yhtälöpari voidaan ratkaista — kuten yhtälökin — algebrallisesti tai graafisesti. Helpoiten keksittävässä algebrallisessa ratkaisussa yhtälöitä muokataan niin, että saadaan yhtälö, jossa on vain yksi muuttuja. Tämä voidaan tehdä esimerkiksi niin, että ensin ratkaistaan alemmasta yhtälöstä muuttuja y muuttujan x suhteen

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ y = 3 - x \end{cases}$$

ja sitten sijoitetaan näin saatu y:n lauseke ylempään yhtälöön

$$3x - 4(3 - x) = 2$$

ja ratkaistaan se:

$$x = 2.$$

Nyt myös y saadaan, onhan se jo lausuttu x:n avulla:

$$y = 3 - x = 3 - 2 = 1.$$

Yhtälöparin yksittäinen ratkaisu on pari $(x, y) = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$, eli $x = 2$ ja $y = 1$.

Kokeile myös graafista tapaa ratkaista yhtälöpari. Pohdi ensimmäisen asteen yhtälöparin ratkaisujen lukumäärää graafisen ratkaisun perusteella. Milloin on vain yksi ratkaisu, milloin ei ole ratkaisua lainkaan. Entä täytyykö tuntemattomien ja yhtälöiden lukumäärän olla sama, jotta yhtälöryhmä voidaan ratkaista?

7.3 Ensimmäisen asteen epäyhtälöistä.

Epäyhtälöllä ei niinkään tarkoiteta tyyppiä $2+3 \neq 6$ olevaa väitettä, vaan kaavaa, jossa kaksi lauseketta on merkitty erisuuriksi ilmaisten samalla kumpi on suurempi. Tämä tapahtuu yleensä käyttämällä jotakin erisuuruusmerkkiä[13] $>$, $\geq$, $<$ tai $\leq$.

Koska reaalilukujen järjestys noudattaa samantapaisia sääntöjä[14] kuin yhtäsuuruuskin, ensimmäisen asteen epäyhtälön algebrallinen ratkaiseminen tapahtuu pitkälti samalla tavalla kuin vastaavan yhtälönkin ratkaiseminen. On kuitenkin huomattava epäyhtälömerkkien kääntyminen kerrottaessa tai jaettaessa puolittain negatiivisella luvulla. Kannattaa ainakin kertaalleen miettiä, miksi näin käy, vaikka säännön helposti oppiikin muistamaan.

Esimerkki.

$$\begin{aligned} -x &\geq 5 \\ x &\leq -5 \end{aligned}$$

Tämän voi päätellä esimerkiksi kokeilemalla joitakin eri x:n arvoja, mutta parempi on piirtää avuksi vaikkapa lukusuora ja miettiä, miten luku ja sen vastaluku sijaitsevat lukusuoralla suhteessa nollaan. Tee se!

Yhtälön, vastaavien epäyhtälöiden ja funktion välinen yhteys tulee hyvin esille, kun tarkastellaan yhtälön ratkaisemista *graafisesti* eli kuvaajan avulla.

[13] Epäyhtälöt liittyvät siis järjestysrelaatioihin, koulussa yleensä lukujen tavalliseen järjestykseen.

[14] Katso aksioomalistaa kohdassa 6.3.

Esimerkki. Tarkastellaan yhtälöä

$$5(x+1) - 2x = x + 11.$$

Totuttuun tapaan yhtälö voidaan sieventää muotoon

$$2x = 6,$$

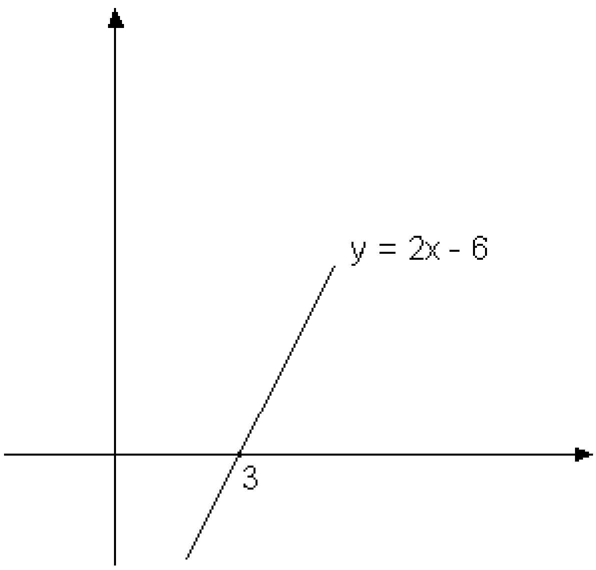
josta siis $x = 3$. Toisaalta alkuperäinen yhtälö voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$0 = 2x - 6.$$

Yhteys funktioon käy selväksi, kun ajatellaan funktion

$$y = 2x - 6$$

kuvaajaa. Se on nouseva suora ja leikkaa $x-$akselin pisteessä $x = 3$, joka siis on yhtälön ratkaisu, sillä leikkauspisteessä $y = 0$.



Kuva 27. $f(x) = y = 2x - 6$.

Kuvaajasta on apua myös epäyhtälön ratkaisemisessa ja ratkaisun havainnollistamisessa. Jos vaihdetaan alkuperäinen yhtälö epäyhtälöksi $2x > 6$ eli

$$2x - 6 > 0,$$

niin kuvaajasta nähdään, että $y = 2x - 6 > 0$, kun $x > 3$. Vastaavasti kuvaajan perusteella $y < 0$, kun $x < 3$, eli yhtälö $2x < 6$ toteutuu, kun $x < 3$.

7.4 Yleistä teoriaa yhtälöistä ja epäyhtälöistä. Yhtälö, yhtälöryhmä tai epäyhtälö on oikeastan tapa kuvailla siinä mainittua lukua x tai vaikka lukuparia (x, y). Yleinen yhtälö on tyyppiä

$$f(x) = b,$$

missä f on funktio $A \to B$ ja $b \in B$. Yhtälön "ratkaiseminen" merkitsee, että alkiota x halutaan kuvailla jollakin "yksinkertaisemmalla" tavalla, esimerkiksi kirjoittamalla näkyviin ensimmäisen asteen yhtälön $f(x) = x - 174 = 1$ ainoa juuri $x = 175$. Hieman näsäviisaasti voimme sanoa, että yhtälö on itse oma "ratkaisunsa", kertoohan yhtälö periaatteessa, mitkä luvut sen toteuttavat, mitkä eivät. Perinteinen "ratkaiseminen" on sitä, että yhtälön informatio kirjoitetaan sellaiseen muotoon, josta kaikkien *ratkaisujen joukon*

$$f^{-1}\{b\} = \{x \in A \mid f(a) = b\}$$

alkiot on helppo nähdä tai muodostaa. Ennen "ratkaisemista" yhtälö $f(x) = b$ on sen sijaan yleensä muodossa, jonka avulla ainoastaan annetusta ratkaisuehdokkaasta $c \in B$ on helppo todeta, kuuluuko se ratkaisujen joukkoon vai ei. Nämä ajatukset ovat merkittäviä, kun tarkastellaan yhtälöitä, joilla on monta juurta, kuten tunnetusti on toisen asteen yhtälöllä ja kuten edellä huomasimme olevan identtisen yhtälön laita.

Mallikas esimerkki tästä ajattelusta on "analyyttinen geometria", jossa esimerkiksi ympyrän pisteitä voidaan kuvailla näillä kahdella eri tavalla. Ensimmäinen tapa on "yhtälö"

$$F(x, y) = x^2 + y^2 = 1,$$

joka oikeastaan on lyhenne joukolle

$$F^{-1}\{1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

missä

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Toinen tapa kuvailla ympyrää yhtälöllä on esittää yhtälön "ratkaisu"

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

joka oikeastaan on lyhenne joukolle

$$\{(x, \sqrt{1 - x^2}) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -\sqrt{1 - x^2}) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Arvioi kummankin esitystavan etuja ja haittoja.

Vastaavanlaista teoriaa voi kehitellä epäyhtälöille ja muillekin samantapaisille ongelmille. Sekä yhtälö että epäyhtälö ovat yleisesti muotoa

$$f(x) \in C,$$

missä f on annettu funktio $A \to B$ ja C on annetttu osajoukko $C \subset B$. Ongelmana on löytää kaikki ne alkiot $x \in A$, joilla $f(x) \in C$, toisin sanoen pitää määrätä "ratkaisujen" joukko eli *alkukuvajoukko*

$$f^{-1}(C) = \{x \in A \mid f(a) \in C\}.$$

Esimerkiksi epäyhtälössä

$$x + 2 \leq 3$$

on $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ ja $C = \{c \in \mathbb{R} \mid c \leq 3\}$. Jos haluat aivojumppaa, mieti, mikä on $f^{-1}(C)$.

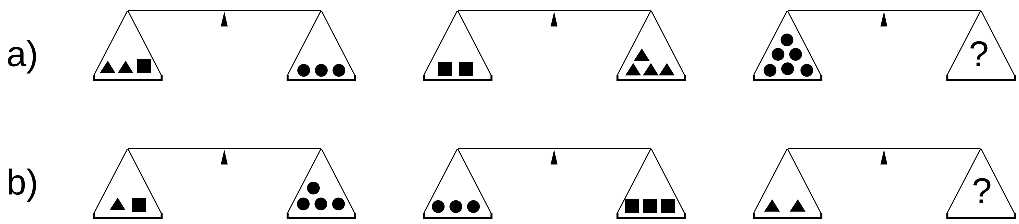
7.5 Yhtälöt sovelluksissa. Luonnontieteissä ja muissa sovelluksissa yhtälöllä voidaan ilmaista yksiselitteisesti ja tarkasti suureiden riippuvuuksia toisistaan, siis mm. erilaisia lainalaisuuksia ja kokeellisesti saavutettuja tuloksia.

Esimerkki.

$$F = ma,$$

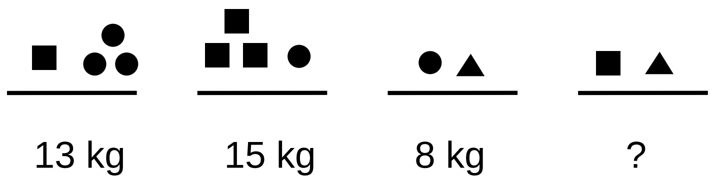
missä F on voima, m on massa ja a on kiihtyvyys. Tästä yhtälön muodossa ilmoitetusta *Newtonin toisesta laista* voidaan lukea monia asioita:
- Jos kappaleeseen vaikuttaa voima F, se aiheuttaa kappaleelle kiihtyvyyden a.
- Jos kiihtyvyyttä halutaan kasvattaa, pitää voimaa lisätä tai massaa vähentää.
- Jos kahden suureen arvo tunnetaan, voidaan kolmas laskea.

7.6 Tehtäviä.
1. Lukujen A ja B summa on 112. Luku A on neljä suurempi kuin C ja B on kaksi pienempi kuin C. Mikä on C?
2. Minkä kolmen peräkkäisen kokonaisluvun summa on 1371?
3. Kuinka monta neliötä tasapainottaa vaa'an?



Kuva 28: Punnitus.

4. Kuinka paljon painaa?



Kuva 29: Paino.

5. Akhilleus ja kilpikonna juoksevat kilpaa. Akhilleuksen nopeus on kymmenkertainen verrattuna kilpikonnan nopeuteen. Lähdössä kilpikonna saa sadan metrin etumatkan. Kun Akhilleus juoksee 100 m ja saapuu kilpikonnan lähtöpaikalle, on kilpikonna edennyt 10 m. Kun Akhilleus juoksee tämän 10 m, on kilpikonna edennyt 1 m. Kun Akhilleus juoksee 1 m, on kilpikonna ehtinyt 10 cm päähän jne. Siis Akhilleus saavuttaa kilpikonnaa, mutta ei saa sitä ikinä kiinni vai saako?
6. Englantilainen matemaatikko Augustus de Morgan eli 1800-luvulla ja tutki mm. joukko-oppia. Ikäänsä koskeviin tiedusteluihin hän vastasi, että oli x vuotta vanha vuonna x^2. Minä vuonna Augustus syntyi?

8 Logiikkaa

Tuskin kukaan haluaa olla epälooginen. Loogisuutta tarvitaan monissa eri tilanteissa; asioilla on syy- ja seuraussuhteensa, tietokoneet ja niiden ohjelmat perustuvat logiikkaan, neuvotteluissa ja juridiikassa tarvitaan logiikkaa jne. Monet pelit ja leikit, esimerkiksi shakki ja sanaristikot, sisältävät paljon logiikkaa.

Klassinen logiikka tutkii *lauseita* eli *väitteitä*, jotka ovat joko tosia (T) tai epätosia (E). Esimerkiksi seuraavat ovat *arkikielen väitelauseita*, jotka väittävät jotakin.

- Euro tulee käyttöön vuonna 2002.
- Varsa on lehmän lapsi.
- 1+1 = 3.
- 0 on parillinen luku.

Kaikki puheemme lauseet eivät kuitenkaan ole väitelauseita tässä mielessä. Esimerkiksi seuraavat eivät väitä mitään eikä niillä ole totuusarvoa T eikä E.

- Anteeksi, en huomannut sinua.
- Otatko teetä?
- (7+1+3) / 2.

Koska loogisuus on jokapäiväinen asia, sitä tulee harrastettua ilman muodollisia opintojakin.

Esimerkki. Olet saarella, jossa asuu kelmejä ja ritareita. Ritarit puhuvat aina totta ja kelmit valehtelevat aina. Ulkonäön perusteella heitä ei voi erottaa toisistaan. Vastaasi tulee kaksi saaren asukasta ja ensimmäinen heistä sanoo:” Ainakin toinen meistä on kelmi.” Mitä tästä voi päätellä?

Kokeillaan kaikki eri vaihtoehdot, joita tilanteessa on:

(Kelmi, Kelmi): Tällöin lause. ”Ainakin toinen meistä on kelmi.” on tosi. Koska kelmit puhuvat vain valheita, ja puhuja on oletuksen mukaan kelmi, johtaa tämä vaihtoehto mahdottomaan tilanteeseen. Tiedetään siis, että ainakin jompikumpi on ritari.

(Kelmi, Ritari): Tässäkin tapauksessa kelmi puhuu totta, eikä se ole mahdollista.

(Ritari, Kelmi): Tämä vaihtoehto ei johda ristiriitaan. Näin voi siis olla.

(Ritari, Ritari): Tässä vaihtoehdossa ritari valehtelisi, ja se olisi vastoin oletuksia. Näin ei voi olla.

Voidaan siis päätellä, että ensimmäinen vastaantulija on ritari ja toinen on kelmi.

Tässä esimerkissä huomattavaa oli, että tehtävänä oli yhdistellä muutamista tosiksi tiedetyistä väitelauseista uusia tosia väitelauseita. Tätä sanotaan *päättelyksi.*

8.1 Merkintöjä.

Kuten lähes kaikkiin matematiikan osa-alueisiin on myös logiikkaan aikojen kuluessa muodostunut omat merkintätapansa, joita tarvitaan tehtävien alkaessa olla mutkikkaampia. Logiikan merkintöjä voi käyttää esimerkiksi päättelyiden oikeellisuuden tarkastamiseen, ja niistä on apua keksimisvaiheessakin. Jos matematiikkaa harrastaessaan kyllästyy pitkien lauseiden kirjoitteluun, voi itse käyttää logiikan merkkejä lyhenteinä, mutta opetustyössä pitää varoa ainakin liikaa symbolien käyttöä.

Loogisia merkkejä ovat mm. loogiset konnektiivit ja kvanttorit, joiden avulla voidaan muodostaa jo annetuista lauseista uusia lauseita. Yleisimmin käytetyt *konnektiivit* ovat nimeltään: implikaatio, (looginen) ekvivalenssi, negaatio, konjunktio ja disjunktio.

Implikaatio	$P \implies Q$	P:stä seuraa Q, joko Q tai ei P.
Ekvivalenssi	$P \iff Q$	P on välttämätön ja riittävä ehto Q:lle, joko sekä P että Q tai sitten ei kumpikaan.
Negaatio	$\neg P$	Väitteen P vastakohta, ”ei P”.
Konjunktio	$P \ \& \ Q$	P ja Q.
Disjunktio	$P \vee Q$	P tai Q.

Näitä toimituksia ilmaistaan suomenkielessä sanallisesti monin eri tavoin.

Esimerkkejä.

1) Kaava

$$3 \leq 4 \ \& \ 5 > 4$$

voidaan lukea esimerkiksi sanomalla, että kolme on enintään neljä, mutta viisi on aidosti enemmän kuin neljä.

2) Kaava

$$(x > y \ \& \ y > z) \implies x > z$$

voidaan lukea esimerkiksi seuraavin tavoin

- Jos x on suurempi kuin y ja y on suurempi kuin z, niin tästä seuraa, että myös x on suurempi kuin z.
- $x > z$, mikäli $x > y$ ja $y > z$.
- Ehto $x > z$ seuraa oletuksista $x > y$ ja $y > z$.

3) Kaava

$$xy = 0 \iff (x = 0 \vee y = 0)$$

voidaan tulkita vaikkapa

- Tulo on nolla on yhtäpitävä sen kanssa, että ainakin toinen tulon tekijä on nolla.
- Tulo on nolla, jos ja vain jos edes toinen tekijä on nolla.
- Tulo on nolla, kun toinen tai molemmat tekijät ovat nollia, muuten ei.

Konnektiivien lisäksi logiikassa käytetään kahta muuta merkkiä, *kvanttoreita.* Loogiset kvanttorit ovat *kaikkikvanttori* $\forall$ ja *olemassolokvanttori* $\exists$. Niilläkin on luonnollisessa kielessä monia eri ilmaisutapoja, jotka tarkoittavat samaa. Mäitä esiintyy seuraavissa esimerkeissä:

4) Kaava

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : (x^2 > 0 \vee x = 0)$$

on suomeksi

- Jokaisen reaaliluvun neliö on positiivinen, paitsi nollan.

- Nollasta eroavan reaaliluvun neliö on aina ei-negatiivinen.
- Kaikkien nollasta eroavien reaalilukujen tulo itsensä kanssa on suurempi kuin nolla.

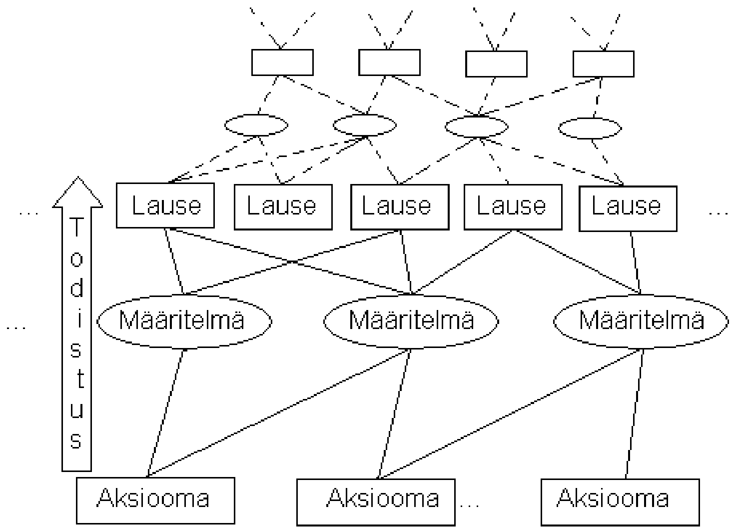
5) Kaava

$$\exists\, x \in \mathbb{R} : (x^2 = 0)$$

tulkitaan esim.

- On reaaliluku, jonka neliö on nolla.
- Niiden reaalilukujen joukko, joiden neliö on nolla, ei ole tyhjä.
- On olemassa sellainen reaaliluku, jonka tulo itsensä kanssa on nolla.

8.2 Matematiikan aksiomaattinen rakenne.



Kuva 30. Matematiikan rakenne.

Klassinen geometria, reaalilukujen laskusäännöt, järjestysrelaatioiden teoria ja myös itse joukko-oppi ovat esimerkkejä *matemaattisista teorioista.* Teoria on kokoelma ”tosia väitteitä”, jotka sisältävät joitakin ”määriteltyjä käsitteitä”. Matemaattisen teorian rakentamisen alkukohdan muodostavat tosiksi sovitut väittämät, joita kutsutaan *aksioomiksi.* Aksioomista saadaan muut teorian todet lauseet eli *teoreemat* johtamalla eli *todistamalla* ne loogisilla päättelyillä. Aksioomia itseään ei voi eikä tarvitse todistaa — riittää että ne eivät ole ristiriidassa keskenään. Aksioomat ovat yleensä sellaisia, että ne on helppo ”ymmärtää” tai ainakin tulkita tavalla, joka on mahdollista uskoa todeksi. Esimerkiksi klassisessa geometriassa on aksiooma, jonka mukaan kahden pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi suora.

Todistettavia lauseita on periaatteessa äärettömän paljon. Kuitenkin vain osa lauseista on matematiikan kannalta mielenkiintoisia. Todistetut lauseet toimivat tukena uusien lauseiden todistamiselle. Esimerkkejä klassisen geometrian teoreemasta ovat tunnettu Pythagoraan lause ja lause, jonka mukaan kaksi eri ympyrää leikkaavat toisiaan enintään kahdessa pisteessä.

Jo aksioomia muotoiltaessa matemaattisen teorian rakentamiseen tarvitaan *käsitteitä*, sellaisia kuin geometriassa piste ja suora tai lukuteoriassa yhteenlasku. Sitä mukaa, kun teoriaa laajennetaan, *määritellään* uusia käsitteitä vanhojen avulla. Uudet käsitteet ovat luonteeltaan lyhenteitä ja sanontoja. On tapana, että määriteltävä käsite kirjoitetaan *kursiivilla* tai <u>alleviivataan</u>. Esimerkki määritelmästä: *neliö* on suorakulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Tässä määritelmässä oletetaan, että käsitteet "suorakulmio", "sivu" ja "sivun pituus" ovat jo ennestään tuttuja. Määritelmissä käytetään hyväksi käsitteitä, jotka on jo määritelty aikaisemmissa määritelmissä tai esiintyvät aksioomissa. Määritelmät muodostavat keskenään hierarkisen rakenteen: ylempänä oleva käyttää hyväkseen alemmassa jo esitettyjä tietoja.

Matematiikan aksiomaattinen rakenne on hyvä tuntea, mutta samalla on syytä muistaa, ettei matematiikan opettaminen, oppiminen eikä keksiminen useinkaan etene sen mukaisessa järjestyksessä.

8.3 Tehtäviä.

1. Käännä seuraavat lauseet puhekielelle ja mieti ovatko ne tosia.

a) $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : x < y$.
b) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : x < y$.

2. Muodosta seuraavien lauseiden negaatiot.

a) On kevät. b) $\forall x \in \mathbb{N} : x \geq 0$. c) $\exists x \in \mathbb{R} : x = 3$.

3. Δ ◯ □ Yksi oikea kuvio, mutta väärällä paikalla.
◯ ★ Δ Kaksi oikeata kuviota, joista toinen oikealla paikalla.
□ ★ ◯ Yksi oikea kuvio, mutta väärällä paikalla.
? ? ? Mikä on oikea rivi?

4. Opettajat Kilpimaa, Mäkinen ja Oksanen opettavat kukin kahta seuraavista aineista: biologia, kemia, liikunta, englanti, ruotsi ja kuvaamataito.

(1) Mäkinen on liikunnan opettajan sukulainen.
(2) Kilpimaa, kuvaamataidon opettaja ja ruotsin opettaja matkustavat usein samalla bussilla kouluun.
(3) Kilpimaa ei ole liikunnan opettaja.
(4) Oksanen, kemian opettaja ja biologian opettaja pelaavat viikonloppuisin tennistä.
(5) Kemian opettajalla ja Kilpimaalla on puutarha.
(6) Mäkinen auttaa ruotsin opettajaa rakennuspuuhissa.

Mitä aineita kukin opettaja opettaa?

5. Taas kelmien saarella. Neljä saaren asukasta on pidätetty epäiltynä rikoksesta. Näistä neljästä yksi on ritari ja loput ovat kelmejä.

A sanoo: "B sen teki".
B sanoo: "D sen teki".
C sanoo: "Minä se en ollut".
D sanoo: "B valehtelee".

Kuka on rikollinen? Entä, jos yksi on kelmi ja loput ritareita?

6. Kaksi asukasta kävelee vastaan. Ensimmäinen sanoo heidän olevan samaa "heimoa". Toinen väittää ensin puhuneen valehtelevan. Mikä on totuus?

9 Tasokuvioita ja kappaleita

Kuvailemmee joitakin geometrisia kuvioita ja kappaleita esitellen samalla hiukan klassisen geometrian ajattelutapaa ja joitakin harjoitusongelmia.

9.1 Tasokuvioista.

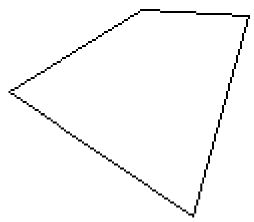
Pinta-alan yksiköt.
Geometrialla on ilmeisiä käytännön sovelluksia. Tasogeometriassa tulee ainakin heti mieleen kuvioiden pinta-alan laskeminen. Konkreettisessa tilanteessa — josta abstraktiotason vähittäinen nostaminen aloitetaan — tarvitaan mittayksiköitä

$$\mathrm{mm}^2, \mathrm{cm}^2, \mathrm{dm}^2, \mathrm{m}^2, \mathrm{a}, \mathrm{ha}, \mathrm{km}^2$$

Pinta-alojen mitoissa suhdeluku on 100, vaikka pituuksilla 10. Miksi?

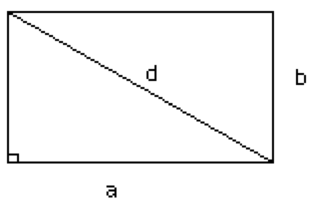
Nelikulmioista.

Tarkastelkaamme aluksi nelikulmioita, niiden pinta-alaa ja muita ominaisuuksia. *Nelikulmiossa* on neljä *sivua*, neljä *kärkeä*, neljä *kulmaa* ja kaksi *lävistäjää.* Nelikulmion kulmien summa on 360°. Voit pohtia, miksi niin on; jaa nelikulmio lävistäjällä kahdeksi kolmioksi. Nelikulmion pinta-alan laskemiseen ei heti keksi kaavaa, vai keksisiköhän sittenkin.



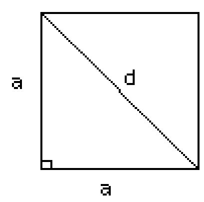
Kuva 31: Nelikulmio.

Määritelmä: *Suorakulmio* eli *suorakaide* on nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat yhtä suuria.



Kuva 32: Suorakulmion lävistäjä on $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Teoreema: Suorakulmion vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkiä.
Määritelmä: Suorakulmion *pinta-ala* on $A = ab$.
Teoreema: Suorakulmion lävistäjän pituus on $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Todistus: Kulmat ovat suoria, koska niitä on neljä yhtäsuurta ja niiden summa on 360 astetta. Väite saadaan siis Pythagoraan lauseesta.

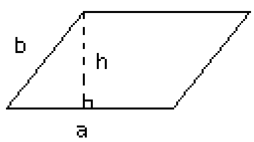


Kuva 33: Neliön lävistäjä on $a\sqrt{2}$.

Määritelmä: *Neliö* on suorakulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.

Teoreemoja: Neliön ala on siis $A = a^2$ ja lävistäjä $d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Todistus: Väitteet ovat erikoistapauksia yllä käsitellyistä suorakulmiota koskevista väitteistä.

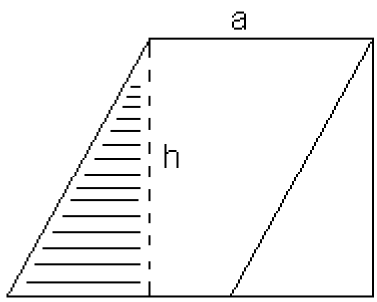


Kuva 34: suunnikkaan korkeus on ah.

Määritelmä: *Suunnikas* on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

Teoreema: Suunnikkaan pinta-ala on $A = ah$.

Todistus: Suorakulmion pinta-alan kaava tunnetaan. Suunnikkaasta voidaan muodostaa suorakulmion muotoinen kuvio "leikkaamalla ja liimaamalla", ja näin saadaan suunnikkaan pinta-alan kaava todistetuksi. (Ks. kuva.)



Kuva 35: Suunnikkaan alan laskeminen.

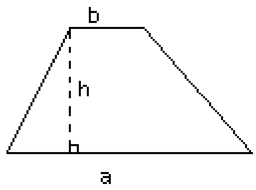
Pohdinta: Todistus vaikuttaa vedenpitävältä. Tarkemmin ajatellen huomaa, että se kuitenkin sisältää joukon "piilo-oletuksia". Pidettiin esimerkiksi varmana, että koko kuvion ala on osien alojen summa, ja että kuvan kaksi kolmiota ovat yhtä suuret. Tällaiset piilo-oletukset ovat matematiikasta puhuttassa hyvin tavallisia. Niihin suhtautuminen on pedagogisesti mielenkiintoinen kysymys.[15]

[15] Kuvan kolmiot voi helposti todistaa yhteneviksi ja siis yhtäsuuriksi. Pinta-alojen yhteenlaskukaava vaikuttaa vaarallisen itsestäänselvältä, ja sen tutkiminen viekin syville vesille, pinta-alan käsitteen määräämiseen "mielivaltaisille" joukoille.

Määritelmä: *Puolisuunnikas* on nelikulmio, jossa on kaksi yhdensuuntaista sivua.

Teoreema: Puolisuunnikkaan pinta-ala on $A = \frac{1}{2}(a+b)h$.

Todistus: Koetapa keksiä itse!

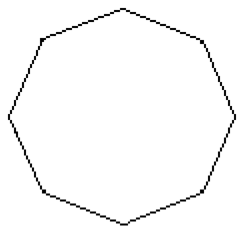


KUVA 36: PUOLISUUNNIKKAAN ALA ON ON $\frac{1}{2}(a+b)h$.

Monikulmioista.

n –kulmiossa on *n sivua*, *n kärkeä* ja tietysti niissä *n kulmaa.*

Monikulmio on *säännöllinen*, jos sen kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat ovat yhtä suuret. Säännöllisiä monikulmioita ovat esimerkiksi neliö ja tasasivuinen kolmio.



KUVA 37: SÄÄNNÖLLINEN KAHDEKSANKULMIO.

$n-$kulmion kulmien summa on $(n-2) \cdot 180°$. Lävistäjiä on $\binom{n}{2} - n$ kappaletta. Luettuasi luvun 10 muistat merkinnän $\binom{n}{2}$ ja voit myös pohtia, mistä lukumäärä on saatu. Kannattaa ehkä aloittaa viisi- tai kuusikulmiolla. Vaikuttaako monikulmion säännöllisyys kulmien summaan tai lävistäjien lukumäärään? Kuinka suuri on säännöllisen $n-$kulmion kulma?

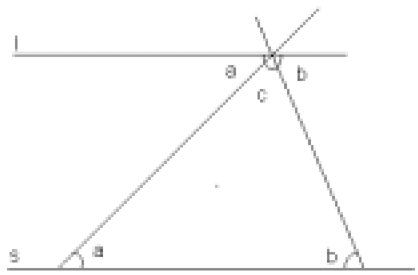
Kolmioista.

Tutkiessamme suunnikkaan pinta-alaa jouduimme vetoamaan kolmioita koskevaan tietoon. Muitakin monikulmioita tutkiskellaan usein paloitelemalla ne esimerkiksi lävistäjien avulla kolmioiksi. Kolmio on yksinkertaisin monikulmio. Siksi kolmioiden tutkiminen on perusgeometriaa.

Kolmiossa on kolme sivua, kolme kärkeä ja kolme kulmaa. Niiden summa tiedetään, ja tämä onkin tärkeä perusasia!

Teoreema: Kolmion kulmien summa on $180°$.

Todistus: Olkoon suorat l ja s yhdensuuntaisia kuvan mukaisesti.



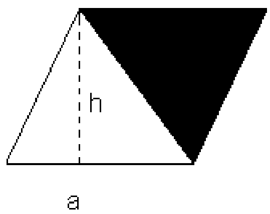
Kuva 38: Kolmion kulmien summa on 180°.

"Samankohtaisten" kulmien yhtäsuuruuden ja "vastakulmien" yhtäsuuruuden perusteella saadaan teoreema todistetuksi. Mieti, mitä oletuksia tämän todistuksen hyväksyminen edellyttää.

Todistetaan toinen kaikkia kolmioita koskeva perusteoreema:

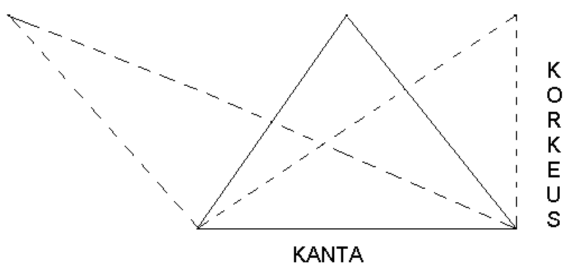
Teoreema: Kolmion ala on $A = \frac{1}{2}$ kertaa kanta kertaa korkeus.

Todistus: Oletetaan suunnikkaan pinta-alan kaava $A = ah$ tunnetuksi. Suunnikas muodostuu kahdesta samanlaisesta kolmiosta, ja näin saadaan kolmion pinta-alan kaava. (Ks. kuva)



Kuva 39: Kolmion ala on on $\frac{1}{2}ah$.

Sitä, ettei kolmion alaan todellakaan vaikuta mikään muu kuin kanta ja korkeus, kannattaa havainnollistaa itselleen vaikka ruutupaperin tai geolaudan avulla. Alla olevassa kuvassa on kolme eri kolmiota, joiden pinta-alat ovat samat.

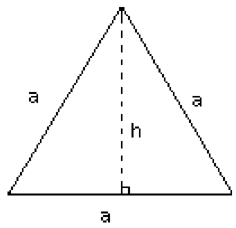


Kuva 40: Kolmion ala riippuu vain kannasta ja korkeudesta.

Tarkastelemme seuraavaksi joitakin erityistyypisiä kolmioita.

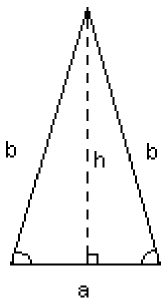
Määritelmiä: On tapana sanoa, että kulma on *terävä*, jos se on alle 90°, *tylppä*, jos se on yli 90° ja *suora*, jos se on tasan 90°. Jos kaikki kulmat ovat teräviä, niin kolmio on *teräväkulmainen*. Jos yksi kulma on tylppä, niin kolmio on *tylppäkulmainen*. Jos yksi kulma on suorakulma, niin kolmio on *suorakulmainen*.

Kolmio on *tasasivuinen*, jos sen kaikki kolme sivua ovat yhtä pitkiä. Tasasivuisessa kolmiossa jokainen kulma on yhtä suuri, siis 60°.



Kuva 41: Tasasivuinen kolmio.

Kolmio on *tasakylkinen*, jos sillä on kaksi yhtä pitkää sivua. Yhtä pitkien sivujen vastaiset kulmat ovat yhtä suuret.

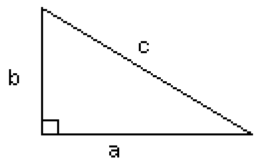


Kuva 42: Tasakylkinen kolmio.

Suorakulmaiseen kolmioon liittyy yksi matematiikan kuuluisimmista teoreemoista, Pythagoraan lause, jonka avulla voi laskea janojen pituuksia[16]:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

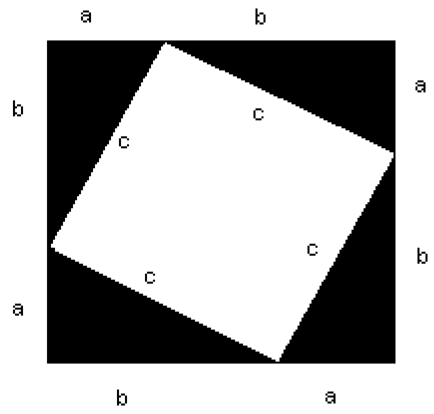
$$\text{eli} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Kuva 43: Suorakulmainen kolmio.

Pythagoraan lauseen todistus: Alla olevassa kuviossa on neljä kappaletta samanlaisia suorakulmaisia kolmioita, joiden kateettien pituudet ovat a ja b sekä hypotenuusan pituus c. Ilmoita ison neliön sisällä olevan pienen neliön pinta-ala kahdella eri tavalla, niin saat Pythagoraan lauseen todistetuksi!

[16]Etenkin suorakulmaisessa koordinaatistossa!



KUVA 44: PYTHAGORAAN LAUSEEN TODISTUS.

Ympyrästä ja ellipsisitä.

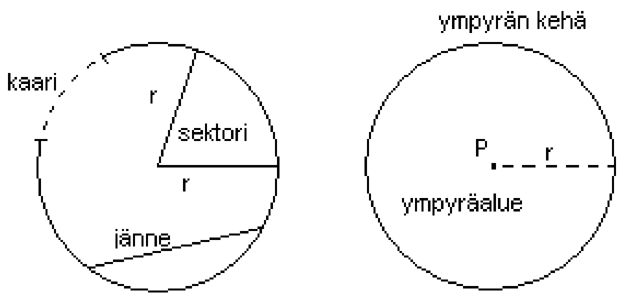
Olemme puhuneet ympyrästäkin jo pitkään. Määritelmä on silti hyvä lausua ääneen ainakin kerran:

Määritelmä: *Ympyrä* eli *ympyräviiva* eli *ympyrän kehä* on niiden tason pisteiden joukko, joiden etäisyys annetusta pisteestä P on sama r.

Ympyrään liittyy muutamia muita käsitteitä, jotka määrittelemme samantien:

Määritelmiä: Piste P on ympyrän *keskipiste* ja etäisyys r on ympyrän *säde*. Ympyrä erottaa tasosta *ympyräalueen*, jonka muodostavat ne pisteet, joiden etäisyys pisteestä P on pienempi kuin r. Myös ympyräaluetta sanotaan toisinaan ympyräksi, mieluummin *kiekoksi*. Reuna ei kuulu alueeseen.

Kahden säteen rajoittama osa ympyräalueesta on *sektori*. *Kaari* on ympyrän kehän osa. *Jänne* on kahden kehän pisteen välinen jana, ja se jakaa ympyräalueen kahdeksi *segmentiksi*. *Halkaisija* on keskipisteen kautta kulkeva jänne.

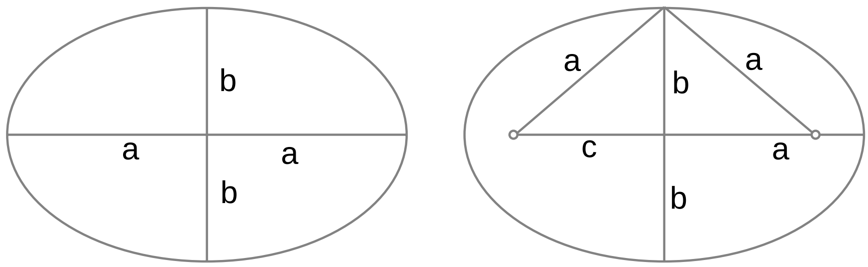


KUVA 45: YMPYRÄSANOJA.

Emme todista mitään ympyrää koskevia teoreemoja, mutta muistutamme siitä, että ympyrään liittyy luku $\pi = 3,14\ldots$. Ympyrän pinta-ala on nimittäin $A = \pi r^2$ ja kehän pituus on $p = 2\pi r$.

Ellipsi on tasokuvio, joka saadaan ympyrää "litistämällä" tai "venyttämällä". Ellipsin pinta-ala on $A = \pi ab$, missä a ja b ovat ellipsin puoliakselit (Vrt. ympyrä).

Ympyrä näyttää sivusta katsottuna ellipsiltä. Ellipsi saadaan myös sahaamalla lieriö poikki vinosti, joten vinosti sahatun tukkipuun päähän muodostuu ellipsi. Itse asiassa ellipsi syntyy myös katkaisemalla ympyräkartio, joten tukki saa kaventua latvaa kohti jyrkästikin, ja poikkileikkaus on silti ellipsi.



KUVA 46: ELLIPSI.

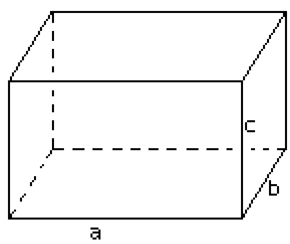
Ellipsin voi muodostaa myös aivan toisella tavalla. Valitaan joku luku r ja piirretään paperille kaksi pistettä - polttopisteet, joiden etäisyys toisistaan, kuvassa $2c$, on alle r. Ellipsi muodostuu niistä pisteistä, joiden etäisyydet polttopisteistä ovat yhteensä enintään r. Kuvasta näkyy, että tällöin ellipsin ison akselin puolikas a on $\frac{r}{2}$, onhan ellipsin suipoimman kohdan etäisyys toisesta polttopisteestä $a + c$ ja toisesta $a - c$, yhteensä siis $2a$. Ellipseillä on huomattava merkitys mekaniikassa, etenkin sen historiassa. Keplerin nerokas oivallushan on, että Maan rata Auringon ympäri on ellipsi, jonka toisessa polttopisteessä on Aurinko.

9.2 Kappaleista.
Tilavuusmitoilla on vanhastaan kahdenlaisia nimiä.

Vetomitta	1 ml	1 cl	1 dl	1 l	(1 dal)	1 hl	(1 kl)
Kuutiomitta	1 cm^3	10 cm^3	100 cm^3	1 dm^3	10 dm^3	100 dm^3	1 m^3

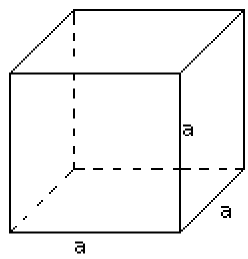
Kymmenkertaista pituutta vastaavien kuutiomittojen suhdeluku on 1000. Miksi?

Suorakulmaisen särmiön eli "tiiliskiven" pinta koostuu kuudesta tahkosta, jotka ovat suorakulmioita. Tahkoina olevien suorakulmioiden sivuja sanotaan *särmiksi* (a, b ja c). Suorakulmaisen särmiön *tilavuus* on $V = abc$.



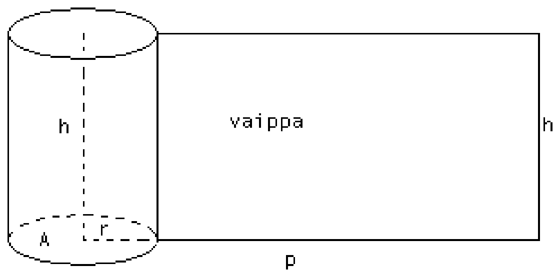
KUVA 47: SUORAKULMAINEN SÄRMIÖ.

Kuutio on suorakulmainen särmiö, jonka kaikki särmät ovat yhtä pitkiä. Kuution tahkot ovat neliöitä. Kuution tilavuus on $V = a^3$.



Kuva 48: Kuutio.

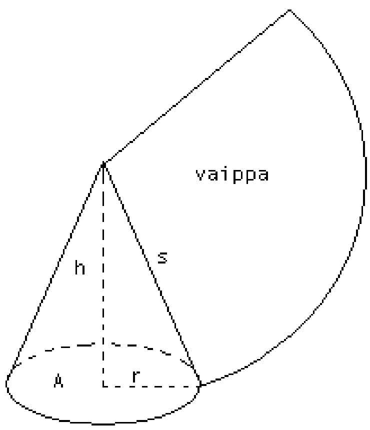
Suoran ympyrälieriön "pohja" ja "kansi" ovat r-säteisiä ympyröitä ja sen *vaippa* tasoon levitettynä suorakulmio. Suoran ympyrälieriön tilavuus on $V = Ah = \pi r^2 h$. Laske tasoon avatun vaipan leveys p.



Kuva 49: (Suora ympyrä)lieriö.

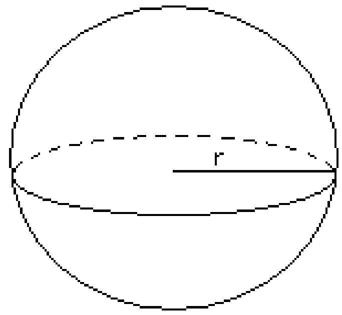
Koetapa kerran itse keksiä luonnolliselta tuntuva määritelmä: Miten määrittelisit *vinon ympyrälieriön*?

Suoran ympyräkartion pohja on ympyrä ja tasoon avattu vaippa on ympyrän sektori, jonka säde on kartion sivujana. Ympyräkartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Yleisemmänkin kartion tilavuus on kolmasosa pohja-aaln ja korkeuden tulosta.



Kuva 50: (Suora ympyrä)kartio.

Pallon tilavuus on $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ja pinta-ala $A = 4\pi r^2$.



Kuva 51: Pallo.

9.3 Yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus.

Kaksi kuviota tai kappaletta voivat sijaita eri paikoissa mutta olla silti muuten täysin samanlaiset, siis samanmuotoiset ja samankokoiset. Kuviot ovat tällöin *yhteneviä*. Yhtenevien kuvioiden kaikki vastinosat ovat pareittain yhtä suuret. Erityisesti vastinpisteiden väliset etäisyydet ovat samoja kummassakin kuviossa, kuviot ovat "pituusmittauksen mielessä samanlaiset".[17]

Kaksi ympyrää ovat yhteneviä ainoastaan, jos niillä on sama säde. Kolmioiden yhtenevyys on hiukan mutkikkaampi asia, mutta ilmeistä on, että kolmiot ovat yhtenevät, jos niiden sivut ovat pareittain yhtä pitkät. Voidaan siis sanoa, että kolmion sivut määräävät täysin kolmion. Vastaavasti kolmion kaksi sivua ja niiden välinen kulma määräävät täysin kolmion. Kahden nelikulmion yhtenevyydelle ei riitä sivujen yhtäpituus, vaan pitää lisäksi tarkastaa esimerkiksi lävistäjien yhtäpituus. Riittääkö toinen? Ovatko kolmioiden peilikuvat keskenään yhteneviä?

Jos katsotaan jotakin kuviota kolme kertaa suurentavalla suurennuslasilla, nähdään kuvio, joka on yhdenmuotoinen alkuperäisen kuvion kanssa mittakaavassa 3:1 eli 3. Yhdenmuotoiset kuviot ovat muuten samanlaiset, mutta yleensä erikokoiset. Samanlaisuus tarkoittaa mm. sitä, että yhdenmuotoisten kuvioiden vastinkulmat ovat yhtäsuuret. Tavallinen kartta on sovellus yhdenmuotoisuudesta, samoin tekniset piirrustukset, valokuvasuurennokset, pienoismallit jne.

Yhdenmuotoisten kuvioiden ja kappaleiden määrittelevä perusominaisuus on, että vastinetäisyyksien suhde, *mittakaava*, on vakio. Seurauksena tästä ovat mm. seuraavat asiat:

- Vastinkulmat ovat yhtä suuret.
- Vastinosien alojen suhde on mittakaavan neliö.
- Vastinosien tilavuuksien (siis myös painojen!) suhde on mittakaavan kuutio.

[17]Tämä ominaisuus, jonka oikea nimi on *isometrinen isomorfismi* on sama asia kuin yhtenevyys.

9.4 Tehtäviä.

1. Kartan mittakaava on 1:50 000. Matka luonnossa on 3 km pitkä. Mikä on matka kartalla? Samalla kartalla olevan pellon pinta-ala on 4 cm^2. Kuinka suuri pelto on luonnossa?

2. Puinen kuutio maalataan siniseksi. Tämän jälkeen kuutio sahataan 27:ksi keskenään yhtä suureksi pikkukuutioksi. Kuinka monessa pikkukuutiossa on sinisiä tahkoja

a) 3, b) 2, c) 1, d) 0 kappaletta?

Entä jos alkuperäisestä kuutiosta sahataan n^3 kappaletta pikkukuutioita?

3. Kolmion sivujen pituuksien suhde on 3:4:5. Kolmion pisin sivu on 3 m. Kuinka pitkä on kolmion piiri?

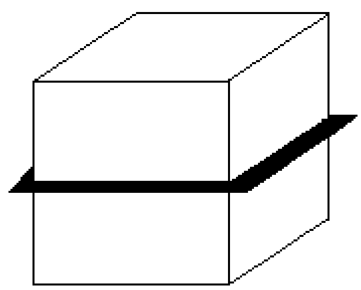
4. Tasakylkisen kolmion kannan ja kyljen pituuksien suhde on 6:5. Kolmion piiri on 32 cm. Mikä on kolmion pinta-ala?

5. Kahdeksantoista samanlaista suorakulmaista särmiötä, joiden särmien pituudet ovat 6 cm, 6 cm ja 2 cm, liimataan yhdeksi isoksi suorakulmaiseksi särmiöksi, jonka särmien pituudet ovat 18 cm, 18 cm ja 4 cm. Liimaa levitetään kaikille pinnoille, jotka menevät vastakkain. Mikä on liimattavien pintojen kokonaisala?

6. Posti asettaa ehdon pikkupakettien koolle: Paketti on voitava aina sitoa narulla, jonka pituus on 84 cm. Mikä on suurimman mahdollisen kuution muotoisen paketin tilavuus, kun solmuihin kuluva osa narua jätetään huomioimatta?

7. Valokuvan mitat ovat 10 cm ja 15 cm. Siitä valmistetaan suurennos, jonka pinta-ala on nelinkertainen alkuperäiseen verrattuna. Mitkä ovat suurennoksen mitat?

8.

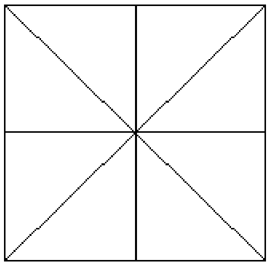


Kuva 52: Kuution symmetriataso.

Kuvioon on piirretty yksi kuution symmetriataso. Kuinka monta symmetriatasoa on a) kuutiolla? b) pallolla?

9. Kuinka monta erilaista suorakulmaista särmiötä voit koota käyttäen 16 pikkukuutiota? Mitkä ovat eri särmiöiden mitat?

10.



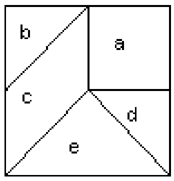
Kuva 53: Kolmiointi.

Kuinka monta kolmiota on ylläolevassa kuvassa?

11. Tasakylkinen kolmio, jonka sivujen pituudet ovat 10 cm, 10 cm ja 16 cm, taitetaan keskeltä kahtia. Kuinka pitkä on taitos?

12. Ympyrän halkaisija on 10 cm. Piirrä ympyrän sisään mahdollisimman suuri neliö. Mikä on neliön pinta-ala?

13.



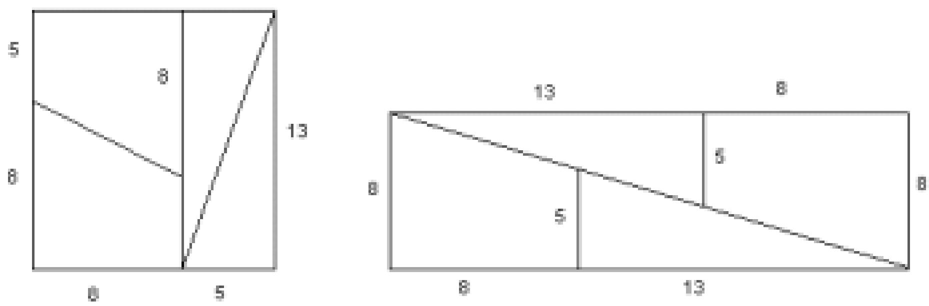
Kuva 54: Palapeli.

Palapelin neliön pinta-ala on yksi pinta-alan yksikkö. Mikä on

a) a:n, b) b:n, c) c:n, d) d:n, e) e:n pinta-ala?

14. Kun suorakulmion muotoisen pahvinpalasen kulmista leikataan 25 cm^2 suuruiset neliöt pois ja käännetään sitten sivut ylös, saadaan laatikko, jossa on neliön muotoinen pohja ja jonka tilavuus on 2000 cm^3. Mitkä mitat täytyy pahvinpalalla olla, että kyseinen laatikko voidaan tehdä?

15. Samoista kappaleista on kuvassa ilmeisesti koottu neliö ja suorakulmio, joiden alat ovat 169 cm^2 ja 168 cm^2. Onko tämä mahdollista?



Kuva 55: Palapeli.

10 Todennäköisyyslaskentaa

Todennäköisyys ja sattuma ovat kaikille tuttuja käsitteitä arkipäivän tilanteista. Sattumat vaikuttavat esimerkiksi säähän, pörssikursseihin, talouselämään, erilaisiin peleihin jne. Todennäköisyyteen läheisesti liittyvä arpominen on myös kautta aikojen kiinnostanut ihmisiä. Usein jopa päätöksenteko tärkeissä asioissa on annettu sattuman ratkaistavaksi ja muinaisten kulttuurien esineistöstä onkin löydetty runsaasti erilaisia nopan kaltaisia esineitä sekä luu- ja puutikkuja, joilla on voitu arpoa.

Matemaattisen todennäköisyyslaskennan katsotaan alkaneen 1600-luvulla kuuluisien ranskalaisten matemaatikkojen Pascalin ja Fermatn pohtiessa keskinäisessä kirjeenvaihdossaan erään nopalla pelattavan uhkapelin voitonjakoa.

10.1 Klassinen todennäköisyys. Heitettäessä tavallista kuusitahkoista noppaa on tulosmahdollisuuksia eli *alkeistapauksia* kuusi kappaletta: 1, 2, 3, 4, 5 ja 6, ja ne kaikki ovat *yhtä todennäköisiä*, koska noppa on symmetrinen ja heiton on tapahduttava reilusti. Klassisessa todennäköisyyslaskennassa tarkastellaan yleensäkin tilannetta, jossa jokainen alkeistapaus on yhtä mahdollinen. Tyypillisiä esimerkkejä klassisen todennäköisyyden sovellustilateista ovat kolikonheitto, kortin veto pakasta jne.

Jos tarkastellaan sitä, millä todennäköisyydellä yhdellä nopan heitolla saadaan parillinen silmäluku, niin sanotaan, että silmäluvut 2, 4 ja 6 ovat *suotuisia alkeistapauksia* ja niiden joukko {2,4,6} on suotuisa tapaus. Suotuisan tapauksen *klassinen todennäköisyys* määritellään suotuisien alkeistapausten ja kaikkien mahdollisten alkeistapausten lukumäärien suhteena. Klassisessa todennäköisyyslaskennassa tarkasteltavana on siis aina aluksi perusjoukko X yhtä mahdolliseksi julistettuja alkioita, joita sanotaan *alkeistapauksiksi.* *Tapaus* –sanalla tarkoitetaan todennäköisyyslasskennassa joukkoa alkeistapauksia, toisin sanoen X:n osajoukkoa $A \subset X$. Määritelmästä seuraa, että itse alkeistapaukset eivät ole tapauksia, mutta vastaavat yksialkioiset joukot ovat: $\{x\} \subset X$, kun $x \in X$.

Määritelmä. Tapauksen A *klassinen todennäköisyys* on

$$P(A) = \frac{\#\{\text{suotuisat alkeistapaukset}\}}{\#\{\text{kaikki mahdolliset alkeistapaukset}\}} = \frac{\#A}{\#X}$$

Todennäköisyyden määritelmästä seuraa, että kulloisenkin perusjoukon eli *varman tapauksen* X todennäköisyys on 1 ja tyhjän joukon eli *mahdottoman tapauksen* $\emptyset$ todennäköisyys on 0, sekä että todennäköisyys voi saada arvoja vain välillä nollasta yhteen. Tätä merkitään $0 \le P(A) \le 1$.

Esimerkkejä. a) Heitetään kerran noppaa. Millä todennäköisyydellä saadaan tulokseksi silmäluku kuusi?

Ainoa suotuisa alkeistapaus tässä yhteydessä on 6, joten suotuisa tapaus on $A = \{6\}$. Kaikki mahdollisuudet, mitä heiton tulokseksi voidaan saada, muodostavat kuusialkioisen perusjoukon $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Kysytty klassinen todennäköisyys on siis

$$P(\{6\}) = \frac{\#\{\text{suotuisat alkeistapaukset}\}}{\#\{\text{kaikki mahdolliset alkeistapaukset}\}} = \frac{1}{6} \approx 0,167.$$

b) Vastaavalla tavalla voidaan laskea todennäköisyys sille, että nostettaessa korttipakasta kortti umpimähkään saadaan ässä. Suotuisat alkeistapaukset muodostavat tässä tapauksessa joukon $A = \{\text{pataässä, herttaässä, ruutuässä, ristiässä}\}$, joten $\#A = 4$. Kaikkiaan eri tulosvaihtoehtoja on 52 kappaletta, eli $\#X = 52$.

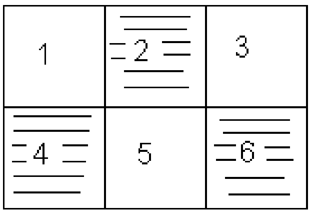
$$P(A) = \frac{\#A}{\#X} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \approx 0,077.$$

Edellä sanottu ei tietenkään tarkoita sitä, että kuusi kertaa noppaa heittämällä saa varmasti yhden kuutosen, tai että kymmenen kertaa kolikkoa heittämällä saa tulokseksi viisi kruunaa ja viisi klaavaa. Kokeilemalla voi kuitenkin todeta, että heittämällä monta kertaa saadaan useimmiten tulos, joka poikkeaa hyvin vähän lasketusta todennäköisyydestä. Simuloimalla tietokoneella kolikonheittoa 10 000 kertaa, saatiin 5010 kruunua.

10.2 Todennäköisyys mittana.
Klassinen todennäköisyys voidaan tulkita mitattavaksi suureeksi, kuten pituus, tilavuus tai massa. Mitan tärkeä ominaisuus on, että koko kappaleen mitta on osien mittojen summa.

Esimerkki. On luonnollista ajatella, että todennäköisyys sille, että nopan heitossa saadaan parillinen silmäluku on silmälukujen 2, 4 ja 6 todennäköisyyksien summa, ja lasku vahvistaa, että näin onkin asianlaita:

$$P(\{2,3,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}).$$



Kuva 56: Pisteiden todennäköisyyksien summa.

Samalla tavalla näemme, että

$$P(\{2,3,6\} = P(\{2,4\}) + P(\{6\}).$$

Klassisessa todennäköisyyslaskennassa tällainen summasääntö pätee aina. Joukko-opin käsitteiden avulla on helppoa sanoa selvemmin, mitä tämä tarkoittaa.

Teoreema. *Olkoot A ja B samaan satunnaisilmiöön liittyviä tapahtumia, toisin sanoen $A \subset X$ ja $B \subset X$. Oletamme, että A ja B ovat erillisiä, ts. niillä ei ole yhteisiä alkeistapauksia, vaan $A \cup B = \emptyset$. Tällöin on*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

TODISTUS.

$$P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#X} = \frac{\#A + \#B}{\#X} = \frac{\#A}{\#X} + \frac{\#B}{\#X} = P(A) + P(B).$$

TEOREEMA (KOMPLEMENTTISÄÄNTÖ). *Merkitään A:lla jotakin tapausta $A \subset X$ ja $\complement A$:lla edellisen komplementtitapausta $X \setminus A$. Tällöin on voimassa*

$$P(\complement A) = 1 - P(A)$$

eli

$$P(A) + P(\complement A) = 1.$$

TODISTUS. Koska A ja $\complement A$ ovat erillisiä, on summasäännön mukaan todellakin

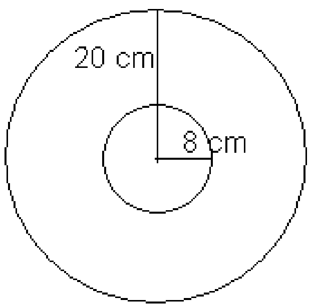
$$P(A) + P(\complement A) = P(A \cup \complement A) = P(X) = 1.$$

10.3 Yleisempi todennäköisyyskäsite. Klassinen todennäköisyyslaskenta ei kelpaa, kun "alkeistapauksien" todennäköisyydet halutaan erisuuriksi tai kun tutkittavia "alkeistapauksia" on äärettömän paljon. Todennäköisyyksiä ei silloin ilmaista lukumäärien suhteina. Loppujen lopuksi tämä ei olekaan pääasia, vaan tärkeintä on, että perusjoukon X jokaiseen mahdolliseen osajoukkoon eli tapaukseen $A \subset X$ tulee liittää luku, joka ilmaisee sen todennäköisyyden. Todennäköisyyksien pitää olla välillä 0–1 ja noudattaa mittojen yhteenlaskusääntöä "yhdisteen todennäköisyys on osien todennäköisyyksien summa".

Käytännössä tapausten todennäköisyydet voivat olla esimerkiksi pituuksia, pinta-aloja tai tilavuuksia.

ESIMERKKI. Tikkataulussa on kymmenen rengasta, joiden jokaisen leveys on 2 cm. Keskellä on numero 10, joka on ympyrä. 10–ympyrän säde on sama kuin muiden renkaiden leveys. Tauluun heitetään yksi tikka tähtäämättä. Millä todennäköisyydellä saadaan tulokseksi vähintään seitsemän?

Tässä tapauksessa pitää laskea pinta-alojen suhde. Ympyrän, joka sisältää numerot 7-10, säde on 8 cm, joten sen ala on $A_1 = \pi \cdot (8 \text{ cm})^2$. Toisaalta koko taulun säde on 20 cm, joten sen ala $A_2 = \pi \cdot (20 \text{ cm})^2$.



KUVA 57: TIKKATAULU.

$$\begin{aligned} P\{\text{"vähintään 7"}\} &= \frac{\text{suotuisan alueen pinta-ala}}{\text{koko taulun pinta-ala}} \\ &= \frac{\pi \cdot (8\text{ cm})^2}{\pi \cdot (20\text{ cm})^2} \\ &= \frac{64}{400} = 0,16. \end{aligned}$$

10.4 Kombinatoriikkaa.

Klassisessa todennäköisyyslaskennassa tehtävien vaikeus piilee yleensä siinä, että pitää pystyä selvittämään eri tapausten lukumäärät. Tällaisia *kombinatorisia ongelmia* ovat mm. kuinka monella tavalla kolme ihmistä voi asettua jonoon tai monellako tavalla korttipakasta voidaan valita viisi korttia. Kombinatoriset ongelmat ovat yleensä helppoja ainoastaan silloin, kun käsiteltävä joukko on pieni. Esimerkiksi eri mahdollisuudet kolmen ihmisen jonosta voi vaivatta piirtää paperille (kokeile), mutta viiden kortin kombinaatioita 52:sta kortista on liian paljon piirrettäväksi.

Huomaa muuten, miten tulkitsimme korttitehtävän; ajattelimme, että valitut viisi korttia ovat järjestämättä, ja että kortteja ei panna vetämisten välillä takaisin pakkaan.

Esimerkkejä.

Tuloperiaate. Kuinka monta eri koodivaihtoehtoa (Esim. 472, 123 jne.) on numerolukossa, jossa on kolme numeroa 0-9?

Ensimmäinen numero voidaan valita kymmenellä eri tavalla.

Toinen numero voidaan valita kymmenellä eri tavalla.

Kolmas numero voidaan valita kymmenellä eri tavalla.

Yhteensä vaihtoehtoja on siis $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ kappaletta. Keksitkö toista tapaa ratkaista tehtävä? (Vihje: ajattele eri vaihtoehtoja lukuina)

Kuinka monella tavalla viisi ihmistä voi asettua jonoon. Tätä ei enää jaksa kokeilla. Täytyy ajatella.

Ensimmäinen ihminen jonoon voidaan valita 5:llä eri tavalla.

sen jälkeen 2. ihminen jonoon voidaan valita 4:llä eri tavalla.

sen jälkeen 3. ihminen jonoon voidaan valita 3:llä eri tavalla.

sen jälkeen 4. ihminen jonoon voidaan valita 2:llä eri tavalla.

sen jälkeen 5. ihminen jonoon voidaan valita 1:llä eri tavalla.

Yhteensä erilaisia jonoja on siis $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ kappaletta.

Yleisesti, jos joukossa on n kappaletta alkioita, voidaan muodostaa erilaisia järjestyksiä eli permutaatioita $n!$ kappaletta.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n.$$

Kuinka monta erilaista paria voidaan muodostaa viiden hengen ryhmästä. Olkoot ryhmän jäsenet vaikka A, B, C, D ja E. Kokeilemalla saadaan parit: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE ja DE. Tulkitsemme kysymysasettelun niin, että AB ja BA tarkoittavat samaa paria. Vastaus on siis kymmenen erilaista paria.

Käsiteltävän joukon kasvaessa kaikkien vaihtoehtojen kokeileminen käy nopeasti kohtuuttoman hankalaksi. Kuinka monta kolmikkoa voi muodostaa korttipakan 52 kortista?

Olemme jo oppineet päättelemään, että järjestettyjä kolmen kortin joukkoja on $52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$ kpl. (Ensimmäinen voidaan valita 52:lla tavalla, toinen voidaan valita 51:llä tavalla, kolmas 50:llä.) Sellaisia kolmen kortin joukkoja, joissa on samat kolme korttia eri järjestyksessä on kussakin tapauksessa $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ kpl. Koska järjestystä ei saanut ottaa huomioon, nämä kolmikot ovat samoja. Erilaisten järjestämättömien kolmikoiden lukumäärä on siis

$$\frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 51 \cdot 52}{3! 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 48 \cdot 49} = \frac{52!}{3!(52-3)!} = 795600 \text{ kpl.}$$

Vastaavasti yleensäkin, kun n:n alkion joukosta valitaan k-alkioisia ryhmiä eli kombinaatioita, on vaihtoehtoja siis olemassa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

kappaletta.

10.5 Pascalin kolmio, kombinatoriikan tärkeä apuväline.

Pascalin kolmio on kolmionmuotoinen kaavio, jossa reunoilla on ykkösiä ja kukin muu luku saadaan laskemalla yhteen kaksi yläpuolella olevaa lukua. Pascalin kolmio on tuttu polynomeilla laskemisesta, mutta sillä on paljon muitakin sovelluksia kombinatoriikassa.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

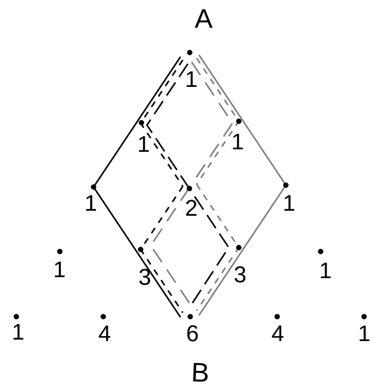
Kuva 58: Pascalin kolmio

$n+1$:sen rivin $k+1$:s luku on nimeltään *binomikerroin*, ja osoittautuu, että itse asiassa se on kohdassa 10.4 määritelty $\binom{n}{k}$, siis esimerkiksi $\binom{4}{2} = 6$ ja $\binom{5}{1} = 5$.

Koetamme näiden muistiinpanojen lopuksi ymmärtää, miksi Pascalin kolmio kelpaa kuvaamaan niin monenlaisia ilmiöitä ja miksi se muodostuu luvuista

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

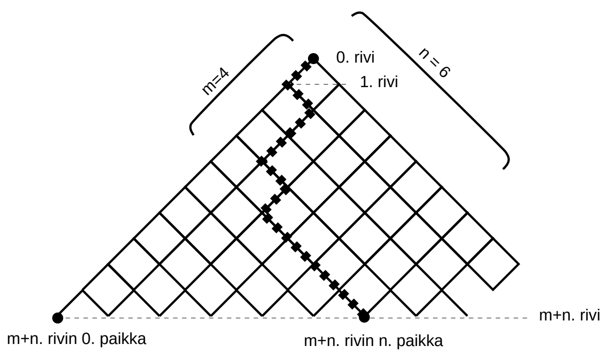
Kolmion käyttökelpoisuus ja ylläoleva kaava perustuvat pohjimmiltaan siihen geometrisluontoiseen seikkaan, että kolmion yläkulmasta A on olemassa tasan $\binom{n}{k}$ alaspäin tulevaa murtoviivaa kohtaan, johon on kirjoitettu luku $\binom{n}{k}$, kun $n \neq 0$.



Kuva 59: Kuusi reittiä ruutukaava-alueella

Väite. *Jos lähdetään liikkumaan kuvion ylänurkasta A alaspäin valiten kussakin risteyksessä kulkusuunta joko joko viistosti oikealle tai vasemmalle alaspäin, niin Pascalin kolmion luku on $\binom{n}{k}$ ja kertoo niiden mahdollisten eri reittien lukumäärän, joita pitkin huipulta A lähtien voi siirtyä kohtaan B.*

Perustelu. Näytetään ensin, että Pascalin kolmion luvut ovat reittien lukumäärät. Merkitään kuhunkin risteykseen luku, joka kertoo kuinka monta reittiä sinne on pisteestä A. Näin syntyy Pascalin kolmion kaltainen kolmio, mutta onko siinä samat luvut? Ainakin reunaa pitkin pääsee vain yhdellä tavalla, joten alueen reunalla on varmasti ykkösiä, kuten Pascalin kolmiossakin. Toisaalta esimerkiksi kohtaan B päätyvistä reiteistä osa tulee viimeisen askelen vasemmalta, osa oikealta, joten kohtaan B päätyy juuri yhtä paljon reittejä kuin sen kahteen yläpuoliseen naapuriristeykseen yhteensä. Reittikolmion luvut muodostauvat siis samalla tavalla yläpuolisia lukuja yhteenlaskemalla kuin Pascalin kolmiossakin. Koska reunat ovat samat ja laskutapa on sama, kolmioissa on samat luvut.



Kuva 60: Reitti ruutukaava-alueella

Ymmärtääksemme, että reittien lukumäärät ovat samat kuin kohdassa 10.4. käsitellyt luvut $\binom{n}{k}$ ja yleensäkin soveltaessamme Pascalin kolmiota erilaisiin tehtäviin meidän on hyvä ymmärtää, että reittiä ajettaessa ylemmältä riviltä alemmalle siirtyminen voidaan tulkita valinnaksi kahden vaihtoehdon välillä, valitaan vasen tai oikea suunta. Esimerkiksi kuvassa 57 esitettyä kymmenennelle riville kuudenteen kohtaan[18] vievää reittiä voi siten kuvata kirjapidolla $(V, O, V, V, O, V, O, O, O, O)$, missä V tarkoittaa ajamista vasemmalle, ja O oikealle. Pisteeseen B vievät juuri ne reitit, joissa on valittu vasemmalle menevä reitti neljäsi, ja kuudesti on menty oikealle.

Tässä on yhteys edellä olevaan kaavaan, jolla voidaan laskea $n-$alkioisesta joukosta muodostettavien erilaisten $k-$alkioisten osajoukkojen lukumäärä.

Olkoon nimittäin kaikkiaan kymmenen hengen ryhmä, josta valitaan kuusi henkilöä. Selvitimme aikaisemmin, että heidät voidaan valita $\binom{10}{6}$ tavalla. Valinnan voi toisaalta ajatella tapahtuvan siten, että järjestyksessä jokaisen henkilön kohdalla tehdään valinta, hänet joko otetaan (O) tai sitten ei (V). Valinta tehdään tässä tapauksessa siis kymmenen kertaa valiten neljä kertaa V, muuten O. Valintaa voi voi siten kuvata kirjapidolla $(V, O, V, V, O, V, O, O, O, O)$, missä V tarkoittaa hylkäystä ja O ottamista.

Huomaamme, että niin Pascalin kolmiossa liikkuessa kuin osajoukon jäseniä valitessa tilanne voidaan tulkita kirjanpitosanan kirjoittamiseksi kymmenestä merkistä, joista neljän on oltava O-merkkejä ja kuuden V-merkkejä. Sekä osajoukkoja (eli kombinaatioita) että Pascalin kolmion reittejä on siis yhtä paljon (kuin tällaisia kirjanpitosanoja). Kokeile!

10.6 Tehtäviä.

1. Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä silmälukujen summa on yli kaksi?

2. Heitetään neljää noppaa ja tarkastellaan mahdollisia tuloksia. Muodosta $\complement A$, kun A on tapaus

a) "kaikki nopat kuutosia",

b) "yksikään noppa ei ole kuutonen",

c) "ainakin yksi noppa on kuutonen".

3. Kolikon heitossa on tullut yhdeksän kruunaa peräkkäin. Mikä on todennäköisyys, että kymmenes heitto antaa tulokseksi kruunan?

4. Kuinka monta erilaista lottoriviä on olemassa?

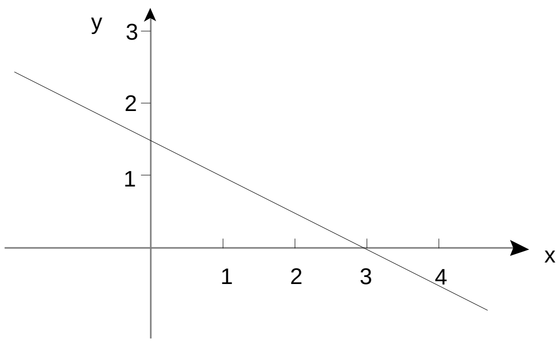
5. Eräässä pelissä juontajalla on kolme laatikkoa, joista yhdessä on palkinto. Kilpailija valitsee yhden laatikon. Tällöin juontaja avaa toisen hänelle jääneistä laatikoista ja näyttää, että se on tyhjä ja tarjoaa kilpailijalle mahdollisuutta vaihtaa. Kannattaako kilpailijan vaihtaa valintaansa?

[18] Laskenta aloitetaan nollasta.

Tehtävien vastauksia

Luku 4
1. 2
2. a) 7, b) 64
3. 8
4. 150
5. On. Ekvivalenssiluokat ovat olennaisesti rationaaliluvut.

Luku 5
1. Vaikkapa $1 \mapsto a$, $2 \mapsto a$, $3 \mapsto c$.
2. On. Voit konstruoida sellaisen vaikka näin: Valitse jokin $b \in B$.
   Aseta sitten kaikkien A:n alkioiden kuvaksi tuo sama b.
   Näin saatu funktio on eräs *vakiofunktio* .
   Sen kuvaaja on $f = A \times \{b\} \subset A \times B$.
3. $2^3 = 8$.
4. Ei, sillä esimerkiksi $f(1,2) = f(1,9)$.
5. Lukupari (x, y) kuuluu joukkoon $f^{-1}(3)$ ehdolla $f(x, y) = 3$,
   eli $x + 2y = 3$.
   Tämän yhtälön toteuttavat pisteet ovat piirroksen suoralla.



Kuva 61: $x + 2y = 3$.

Luku 6
1. Kaikki luvut voidaan esittää luvun kaksi potenssien summana.
2. a) 0, b) 0
3. $(2 + 2) \cdot (2 - 2) : 2 + 2 \cdot (2 - 2) : 2 + 2 \cdot (2 - 2) = 0$.
4. 5 tyttöä ja 4 poikaa.
5. Ei ole olemassa pienintä positiivista reaalilukua.

6 Voi. Esim. $\pi + (-\pi) = 0$.

7. On.
8. Tiedetään: $x > 10$, $y > 10$ ja $x + y = 1000$.

Näiden kahden luvun neliöiden kolme viimeistä numeroa ovat samat, jos neliöiden erotus on jaollinen 1000:lla.

Luku 7
1. 55.
2. 456, 457, 458.
3. a) 4 neliötä b) 6 neliötä.
4. 4. 9 kg.
5. Saa. Kilpikonna ehtii juosta $11\frac{1}{9}$ m.
6. Vuonna 1806.

Luku 8
1. a) Jokaista reaalilukua kohti on olemassa sitä aidosti pienempi reaaliluku. Tosi on.

b) On olemassa reaaliluku, joka on kaikkia muita aidosti pienempi. Epätosi.
2. a) Ei ole kevät.
b) $\exists\, x \in N : x < 0$.
c) $\forall\, x \in R : x \neq 3$.
3. ★, Δ, Δ
4. Kilpimaa: biologia, englanti, Oksanen: liikunta, ruotsi, Mäkinen: kemia, kuvaamataito.
5. C. B.
6. 1. on kelmi ja 2. on ritari.

Luku 9
1. 6 cm . 1 km^2.
2. a) 8
b) $12(n - -2)$
c) $6(n - 2)2$
d) $(n - 2)3$
3. 7,2 m.
4. 4. 48 cm^2.
5. 1224 cm^2.
6. Särmä on 10,5 cm.
7. 20 cm×30 cm .
8. a) 7
9. Neljä: 1 cm× 1 cm× 16 cm
1 cm×2 cm×8 cm
1 cm× 4 cm× 4 cm
2 cm×2 cm× 4 cm
10. 16.
12. 50 cm^2.
13. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{8}$, c) $\frac{1}{4}$, d) $\frac{1}{8}$, e) $\frac{1}{4}$.
14. 30 cm× 30 cm.
15.Ei. Vihje. yhdenmuotoisuus.

Luku 10
1. $\frac{35}{36}$.
2. a) ”ainakin yksi noppa on muu kuin kuusi”
b) ” ainakin yksi noppa on kuusi”
c) ”yksikään noppa ei ole kuusi”
3. 1/2.
4. $\binom{39}{7} = 15380937$.
5. Kannattaa. Tn. sille, että palkinto on toisessa juontajalle aluksi jäävässä paketissa on 2/3. Tn sille, että kilpailija heti valitsee oikean laatikon on 1/3.

HAKEMISTO

Lähteet

Fernström, T. & Ikäheimo, H. & Kairavuo, K. & Korhonen, H. & Koskeno, A. & Lampinen, A. Uusia tuulia Unkarista. Dimensio 1/2001.

Hannukainen, M. & Högmander, H. & Kahanpää, L. 1993. Johdatus matematiikkaan. Jyväskylän yliopisto. Matematiikan laitos. Luentomoniste 23.

Hautajärvi, T. & Ottelin, J. & Wallin-Jaakkola, L. 1999. Variaabeli 1: Matemaattinen ongelmanratkaisu. Keuruu: Otava.

Hautajärvi, T. & Ottelin, J. & Wallin-Jaakkola, L. 2000. Variaabeli 2: Tilastot ja todennäköisyys. Keuruu: Otava.

Hogben, L.1939. Matematiikkaa kaikille. Porvoo: WSOY.

Jäppinen, P. & Kupiainen, A. & Räsänen, M. 1998. Calculus: Lukiomatematiikan johdantokurssi. Keuruu: Otava.

Järvinen, R. 1999. Kolmio: Matematiikkaa syventäjille. Kirjayhtymä.

Kontkanen, P. & Liira, R. & Luosto, K. & Nurmi, J. & Nurmiainen, R. & Ronkainen, A. & Savolainen, S.: . Pitkä Matematiikka. MA1, Matemaattinen ongelmaratkaisu Kirjayhtymä. 1998

Lahti, U. & Laine, Y. 1987. Alfa. Lukion laajan matematiikan kurssit 1-4. Keuruu: Otava.

Lahti, U. & Laine, Y. 1988. Alfa. Lukion laajan matematiikan kurssit 5-8. Keuruu: Otava.

Luostarinen, P. & Saranen, E.1986. Pulmakortit 8 ja 9: Matematiikan ongelmatehtäviä. Weilin + Göös.

Martinson, T. & Thompson, J. 1993. Matematiikan käsikirja. Helsinki: Tammi.

Merikoski, J. & Niva, R. & Oinas-Kukkonen, H. 1990. Akseli 1: Matematiikan laaja oppimäärä kurssit 1-4. Espoo: Weilin+Göös.

Merikoski, J. & Niva, R. & Oinas-Kukkonen, H. 1992. Akseli 1: Matematiikan laaja oppimäärä kurssit 9 -10. Espoo: Weilin+Göös.

Näätänen, M. 2001. Englantilaisten kokemuksia unkarilaisesta matematiikan opetuksesta. Dimensio 2/2001.

Salminen, H. & Väänänen, J. 1997. Johdatus logiikkaan. Jyväskylä: Gummerrus kirjapaino Oy.

Servais, W. & Varga, T. 1971. Teaching School Mathematics. Penguin Education. A Unesco Source Book.

Suomela, P. 1991. Matematiikan historia. Jyväskylän yliopisto. Matematiikan laitos. Luentomoniste 5.

Unkarilaista matematiikanopetusta käsittelevää materiaalia löytyy lisäksi matematiikkalehti Solmusta http://solmu.math.helsinki.fi