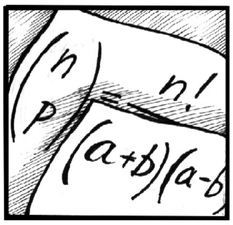

# Tehtäviä

1. Osoita, että

   a) $\underbrace{1\ldots1}_{n}\underbrace{2\ldots2}_{n}-\underbrace{3\ldots3}_{n}$ ja

   b) $\underbrace{4\ldots4}_{n}\underbrace{5\ldots5}_{n}-\underbrace{9\ldots9}_{n}$

   ovat neliöitä (jonkin positiivisen kokonaisluvun toisia potensseja).

2. Osoita, että

   a) $\underbrace{1\ldots1}_{n}\cdot\underbrace{1\ldots1}_{n}\underbrace{2\ldots2}_{n}\underbrace{1\ldots1}_{n}$,

   b) $\underbrace{1\ldots1}_{n}\cdot\underbrace{4\ldots4}_{n}\underbrace{1\ldots1}_{n}$ ja

   c) $\underbrace{1\ldots1}_{n}\cdot\underbrace{9\ldots9}_{n}\underbrace{6\ldots6}_{n}\underbrace{1\ldots1}_{n}$

   ovat neliöitä.

3. Luku $a0bb$, missä $a,b=0,1,2,\ldots,9$ ja $a\neq0$, on jaollinen 12:lla ja jos sen jakaa luvulla 11, on jakojäännös 10. Ratkaise $a0bb$.

4. Sievennä

$$111\cdot(1\underbrace{0\ 0}_{2}1\underbrace{0\ 0}_{2}1)\cdot(1\underbrace{0\ldots0}_{8}1\underbrace{0\ldots0}_{8}1)\cdot$$
$$\cdots\cdot(1\underbrace{0\ldots0}_{3^n-1}1\underbrace{0\ldots0}_{3^n-1}1).$$

5. Ratkaise kaikki kaksinumeroiset luvut, jotka ovat jaollisia numeroidensa neliöiden summalla. (Esimerkki: 10 on jaollinen luvulla $1^2+0^2=1$.)

Vihjeeksi seuraaviin tehtäviin: Kummassakin käytetään kongruensseja sekä Fermat'n ja Eulerin tulosta, jonka mukaan

$$a^{\varphi(n)}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,n)$$

aina kun lukujen $a$ ja $n$ suurin yhteinen tekijä on 1. Tässä $\varphi$ on Eulerin $\varphi$-funktio, jonka arvo $\varphi(n)$ on niiden lukujen $m\in\{1,\ldots,n\}$ lukumäärä, joille syt $(n,m)=1$. Entisessä Neuvostoliitossa tämäntyyppisiä tehtäviä ratkaistiin Koululaisten olympialaisissa.

6. Osoita, että luku $2\underbrace{000\ldots0}_{1997}1998$ on jaollinen luvulla 1999.

7. Ratkaise luvun $4^{5^{45}}$ kolme viimeistä numeroa.

Tehtävien ratkaisut.

**Djemil Mamedjarov**