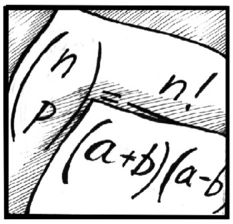

Tehtävien ratkaisut

1. Merkitään $\underbrace{aa\ldots a}_{k}\underbrace{bb\ldots b}_{k}-\underbrace{cc\ldots c}_{k}$, missä a, b ja c ovat kokonaislukuja. Tällöin

$$\underbrace{aa\ldots a}_{k}\underbrace{bb\ldots b}_{k} = a\cdot\frac{10^k-1}{9}\cdot 10^k + b\frac{10^k-1}{9} = (a\cdot 10^k+b)\frac{10^k-1}{9} = \cdots = \frac{a\cdot 10^k+b}{3}\cdot\underbrace{33\ldots 3}_{k}$$
$$= (a\cdot\underbrace{33\ldots 3}_{k}+\frac{a+b}{3})\cdot\underbrace{33\ldots 3}_{k} = a\cdot(33\ldots 3)^2+(a+b)\cdot\underbrace{11\ldots 1}_{k},$$

eli jos $a=1$, $a=4$ tai $a=9$ ja $c=a+b\le 9$, niin $\underbrace{aa\ldots a}_{k}\underbrace{bb\ldots b}_{k}-\underbrace{cc\ldots c}_{k}$ on neliö.

Esimerkiksi $\underbrace{4\ldots 4}_{k}\underbrace{3\ldots 3}_{k}-\underbrace{7\ldots 7}_{k}$ on neliö.

2. a) $\underbrace{1\ldots 1}_{n}\underbrace{2\ldots 2}_{n}\underbrace{1\ldots 1}_{n}\cdot\underbrace{1\ldots 1}_{n}=\underbrace{1\ldots 1}_{n}{}^2\cdot(10^n+1)^2$,

   b) $\underbrace{1\ldots 1}_{n}\cdot\underbrace{4\ldots 4}_{n}\underbrace{1\ldots 1}_{n}=\underbrace{1\ldots 1}_{n}{}^2\cdot(2\cdot 10^n+1)^2$, ja

   c) $\underbrace{1\ldots 1}_{n}\cdot\underbrace{9\ldots 9}_{n}\underbrace{6\ldots 6}_{n}\underbrace{1\ldots 1}_{n}=\underbrace{1\ldots 1}_{n}{}^2\cdot(3\cdot 10^n+1)^2$.

3. Luku on 4:llä jaollinen, joten ainoat mahdollisuudet ovat $b=0$, 4 tai 8. Jos $b=0$, niin 3:lla jaettaessa saadaan $\frac{a000}{3}$, joten $a=3$ tai 9. Jos $b=4$, niin vastaavalla tavalla saadaan $a=1$, 4 tai 7, ja jos $b=8$, niin $a=2$, 5 tai 8. Jaettaessa 11:llä jakojäännös on 10, joten jäljelle jää vain yksi mahdollisuus 1044.

4. Kaavaa $(a-1)(a^2+a+1)=a^3-1$ käyttäen saamme esimerkiksi

$$(a^2+a+1)(a^6+a^3+1)(a^{18}+a^9+1)(a^{54}+a^{27}+1)=\frac{a^{3^4}-1}{a-1}=1+a^2+\cdots+a^{80},$$

joka on $\underbrace{11\ldots 1}_{80}$ silloin kun $a=10$. Yleisessä tapauksessa saamme vastaukseksi $\underbrace{11\ldots 1}_{3^n-1}$.

5. Yhtälöksi saadaan $(a^2+b^2)m=a\cdot 10+b$, missä a, b ja m ovat kokonaislukuja. Tästä seuraa, että

$$a^2m-10a+b^2m-b=0$$

ja siis

$$a = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(b^2m^2 - bm)}}{2m}.$$

Merkitään $k = bm$, jolloin k on kokonaisluku. Lausekkeen $\sqrt{100 - 4k(k-1)}$ täytyy olla kokonaisluku, joten kokeilemalla k:n arvoja 0, 1, 2, 3, 4 ja 5 nähdään, että ainoa mahdollisuus on $k = bm = 0$. Näin ollen $b = 0$, sillä $m \neq 0$. Sijoittamalla saamme

$$a = \frac{10 + 10}{2m} = \frac{10}{m} \quad \text{ja siten } a = 1,\ 2,\ \text{tai } 5,$$

joten kysytty ominaisuus on vain kolmella luvulla 10, 20 ja 50:

$$\frac{10}{1^2 + 0^2} = 10, \qquad \frac{20}{2^2 + 0^2} = 5 \quad \text{ja} \quad \frac{50}{5^2 + 0^2} = 2.$$

6. Koska $2\underbrace{000\ldots0}_{1997}1998 = 2000 \cdot 10^{1998} + 1998$ ja 1999 on alkuluku, jolle $\varphi(1999) = 1998$, saamme Fermat'n lausetta käyttäen tulokseksi $1 \cdot 1 - 1 \equiv 0 \pmod{1999}$.

7. Tutkitaan lukua

$$\frac{4^{5^m}}{1000} = \frac{4^{5^m}}{8 \cdot 125} = \frac{2^{2 \cdot 5^m - 3}}{125}.$$

Vihjeen mukaan $1 \equiv 2^{\varphi(125)} \pmod{125}$, missä

$$\varphi(125) = 125 - 25 = 100,$$

sillä luvuista $1, 2, \ldots, 125$ ainoastaan luvuille $m = 5, 10, 15, \ldots, 120, 125$ on syt $(m, 125) > 1$, ja näitä on 25 kappaletta. Tästä seuraa, että $2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$, ja toisaalta $5^m \equiv 25 \pmod{100}$, kun $m \geq 2$. Tätä tietoa käyttäen saamme

$$\begin{aligned} 2^{2 \cdot 5^m - 3} &\equiv 2^{2 \cdot 25 - 3} \pmod{125} \equiv 2^{47} \pmod{125} \equiv (2^7)^6 2^5 \pmod{125} \\ &\equiv (128)^6 2^5 \pmod{125} \equiv (125 + 3)^6 2^5 \pmod{125} \equiv 3^6 \cdot 2^5 \pmod{125} \\ &\equiv 729 \cdot 32 \pmod{125} \equiv 78 \pmod{125}. \end{aligned}$$

Näin ollen luvun 4^{5^m}, $m \geq 2$, kolme viimeistä numeroa ovat $78 \cdot 8 = 624$, koska $125 \cdot 8 = 1000$ ja $624 < 1000$.

Djemil Mamedjarov